Recursão

Raquel de Souza Francisco Bravo
e-mail: raquelbr.ic@gmail.com

29 de novembro de 2016

Relações de Recorrência

Problemas combinatórios são frequentemente resolvidos por processos que reduzem o problema original a vários problemas menores.

Relações de Recorrência

Problemas combinatórios são frequentemente resolvidos por processos que reduzem o problema original a vários problemas menores.

Se o problema consiste de uma série de problemas de contagem de um parâmetro n e existe suficiente regularidade nos problemas, o método de relacões de recorrência pode ser útil.

Relações de Recorrência

Objetivo:

- Apresentar a técnica recursiva que permite reduzir um problema envolvendo n objetos a outro problema semelhante de tamanho menor, que por sua vez é possível reduzir a outro problema do mesmo tipo, e assim reduzindo a problemas com menos elementos até obter um problema de simples resolução.

Relações de Recorrência

Objetivo:

- Apresentar a técnica recursiva que permite reduzir um problema envolvendo n objetos a outro problema semelhante de tamanho menor, que por sua vez é possível reduzir a outro problema do mesmo tipo, e assim reduzindo a problemas com menos elementos até obter um problema de simples resolução.

Importância:

- Muitos problemas de contagem são modelados e resolvidos usando relações de recorrência.

Relações de Recorrência

Ex: Considere a sequência:

$$S = (1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots)$$

Relações de Recorrência

Ex: Considere a sequência:

$$S = (1, 2, 2^2, 2^3, \cdots , 2^n, \cdots)$$

A sequência pelo seu termo geral é 2^n, $n = 0,1,2,\cdots$

Relações de Recorrência

Ex: Considere a sequência:

$$S = (1, 2, 2^2, 2^3, \cdots, 2^n, \cdots)$$

A sequência pelo seu termo geral é 2^n, $n = 0,1,2,\cdots$

Outra alternativa: Expressar o n-ésimo número em termos do (n-1)-ésimo, juntamente com o primeiro elemento da sequência, que é $2^0=1$.

Relações de Recorrência

Ex: Considere a sequência:

$$S = (1, 2, 2^2, 2^3, \cdots , 2^n, \cdots)$$

A sequência pelo seu termo geral é 2^n, $n = 0,1,2,\cdots$

<u>Outra alternativa:</u> Expressar o n-ésimo número em termos do (n-1)-ésimo, juntamente com o primeiro elemento da sequência, que é $2^0=1$.

$$a_n = \begin{cases} 2 \cdot a_{n-1} & , \text{se } n > 0 \\ 1 & , \text{se } n = 0 \end{cases}$$

Definição

Dada uma sequência de números $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Uma relação de recorrência é uma equação que relaciona um número a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, para qualquer n.

Definição

Dada uma sequência de números $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Uma relação de recorrência é uma equação que relaciona um número a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, para qualquer n.

Uma relação de recorrência também é chamada uma equação de diferenças.

Definição

Dada uma sequência de números $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Uma relação de recorrência é uma equação que relaciona um número a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, para qualquer n.

Uma relação de recorrência também é chamada uma equação de diferenças.

Além disso, para a relação de recorrência ser calculada precisamos conhecer um (ou vários) elementos da sequência chamadas: condições iniciais ou condições de fronteira.

Definição

Dada uma sequência de números $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Uma relação de recorrência é uma equação que relaciona um número a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, para qualquer n.

Uma relação de recorrência também é chamada uma equação de diferenças.

Além disso, para a relação de recorrência ser calculada precisamos conhecer um (ou vários) elementos da sequência chamadas: condições iniciais ou condições de fronteira.

No exemplo anterior, a condição de fronteira é

Definição

Dada uma sequência de números $a_0, a_1, \cdot \cdot \cdot, a_n$. Uma relação de recorrência é uma equação que relaciona um número a_n a alguns dos seus predecessores na sequência, para qualquer n.

Uma relação de recorrência também é chamada uma equação de diferenças.

Além disso, para a relação de recorrência ser calculada precisamos conhecer um (ou vários) elementos da sequência chamadas: condições iniciais ou condições de fronteira.

No exemplo anterior, a condição de fronteira é $a_0 = 1$.

Relação de Fibonacci

O problema foi proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202. Tal problema foi formulado da seguinte forma:

Relação de Fibonacci

O problema foi proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202. Tal problema foi formulado da seguinte forma:

- Determine o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

Relação de Fibonacci

O problema foi proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202. Tal problema foi formulado da seguinte forma:

- Determine o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

(a) Inicialmente tem-se um único par de coelhos, um macho e uma fêmea recém nascidos;

Relação de Fibonacci

O problema foi proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202. Tal problema foi formulado da seguinte forma:

- Determine o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

(a) Inicialmente tem-se um único par de coelhos, um macho e uma fêmea recém nascidos;
(b) Todo mês cada par de coelhos com pelo menos 2 meses produz um novo par de coelhos de sexo oposto.

Relação de Fibonacci

O problema foi proposto por Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, em um livro publicado em 1202. Tal problema foi formulado da seguinte forma:

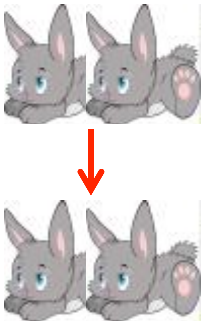
- Determine o número de pares de coelhos ao final de 12 meses sob as seguintes condições:

(a) Inicialmente tem-se um único par de coelhos, um macho e uma fêmea recém nascidos;
(b) Todo mês cada par de coelhos com pelo menos 2 meses produz um novo par de coelhos de sexo oposto.
(c) Nenhum coelho morre durante este processo.

Relação de Fibonacci

p_o

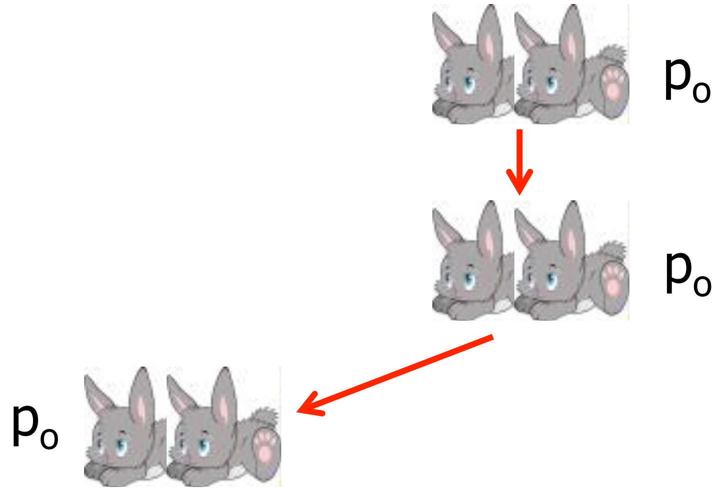
Relação de Fibonacci



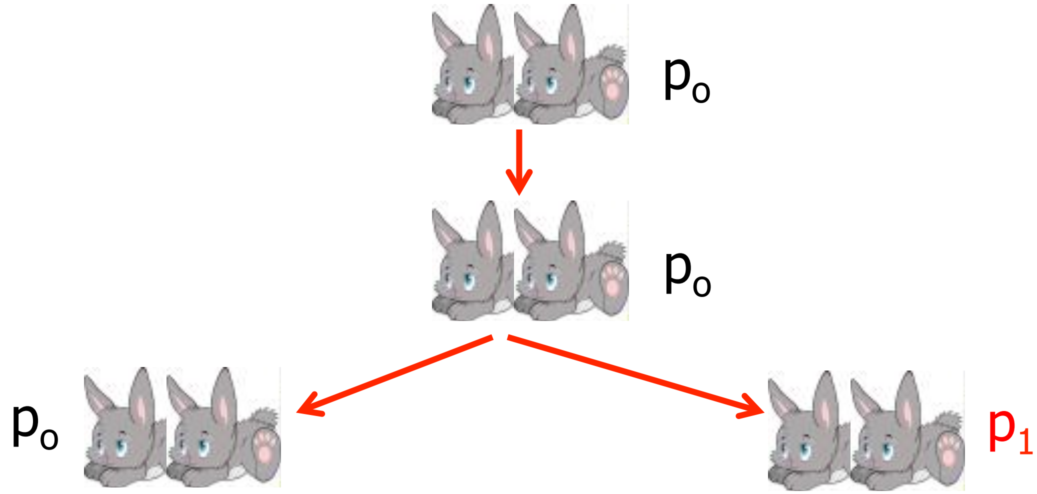
p_o

p_o

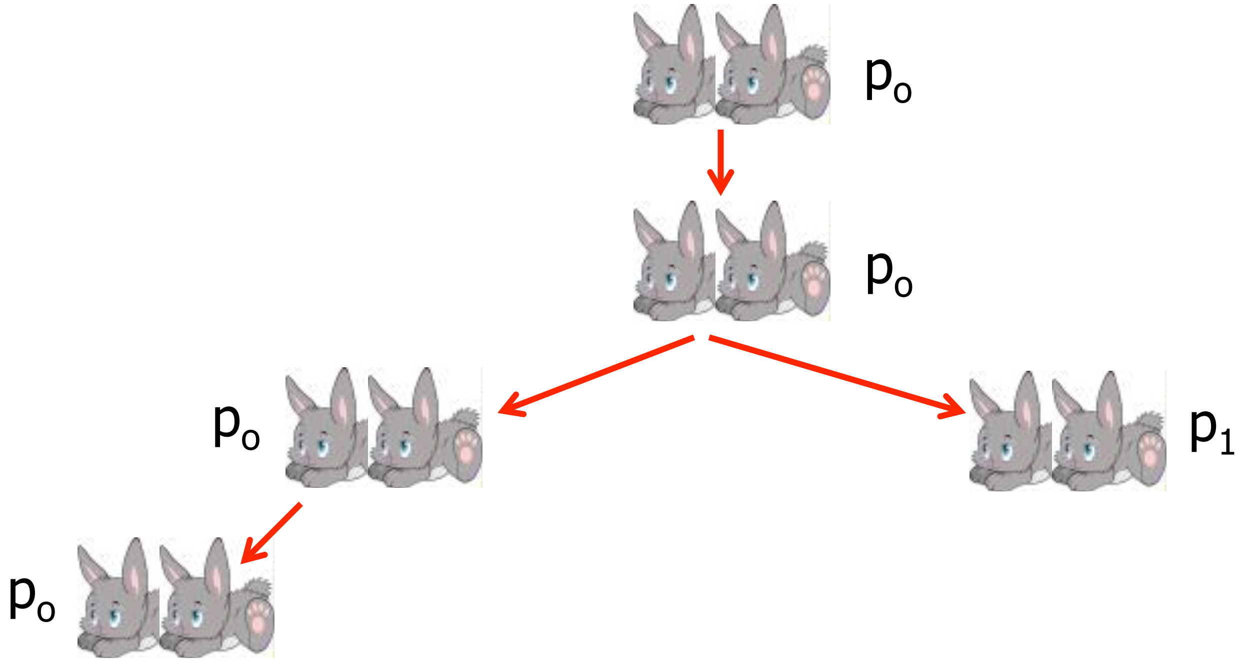
Relação de Fibonacci



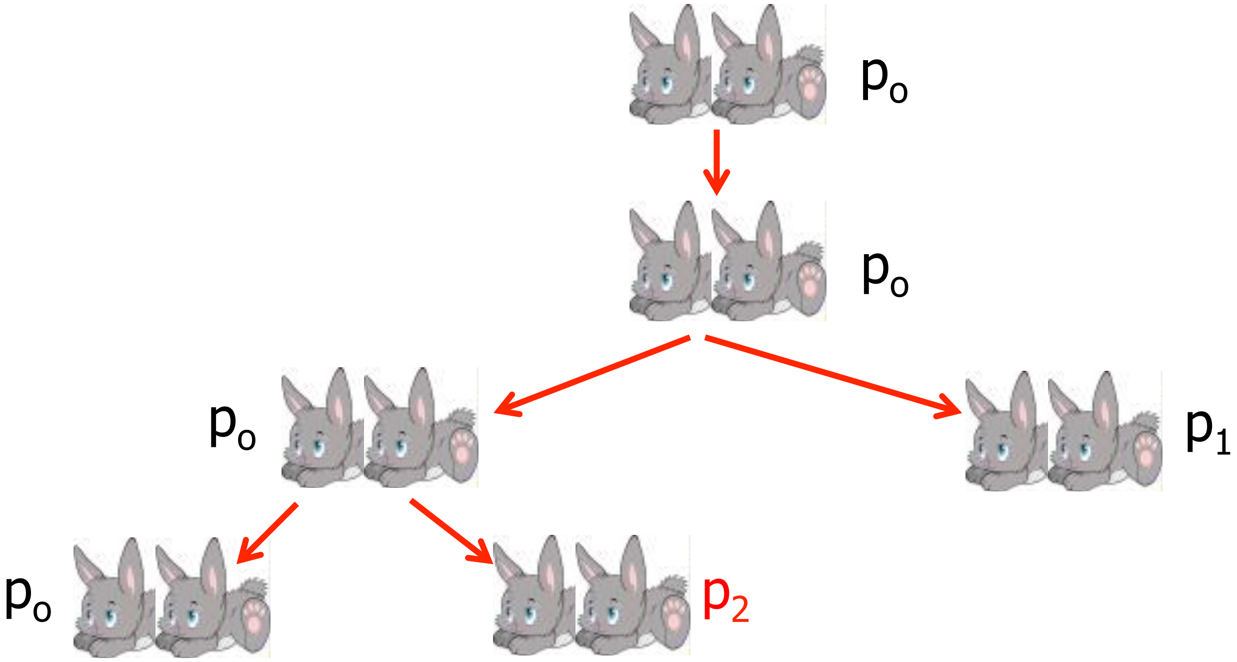
Relação de Fibonacci



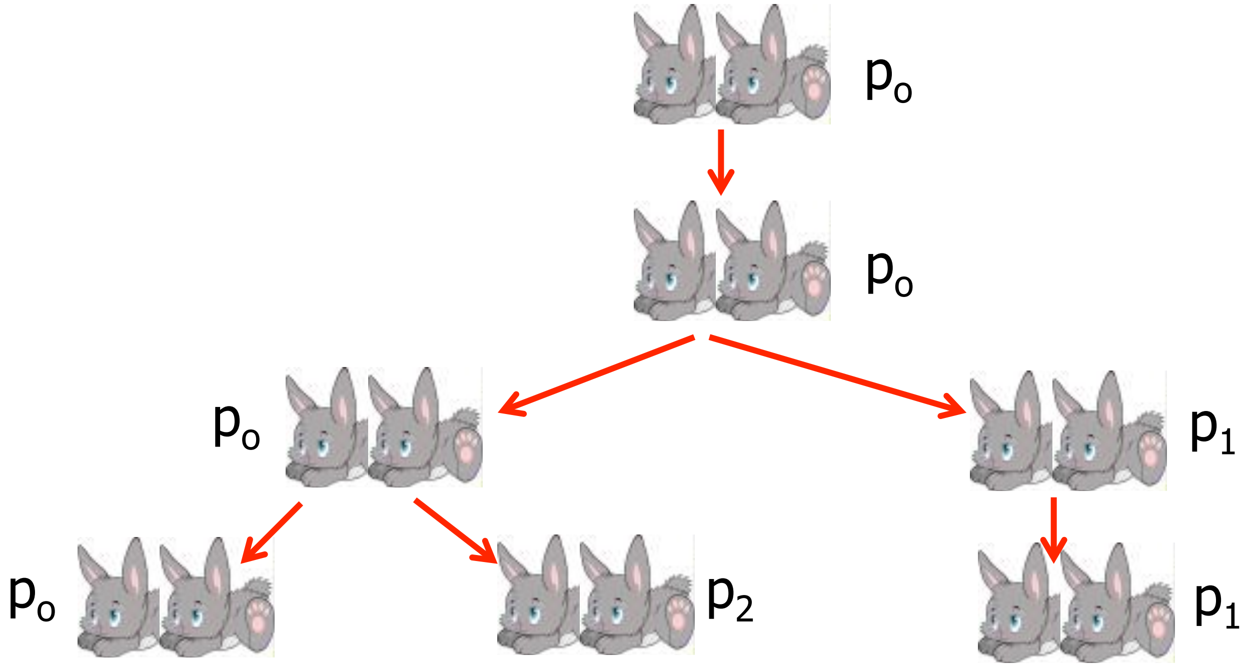
Relação de Fibonacci



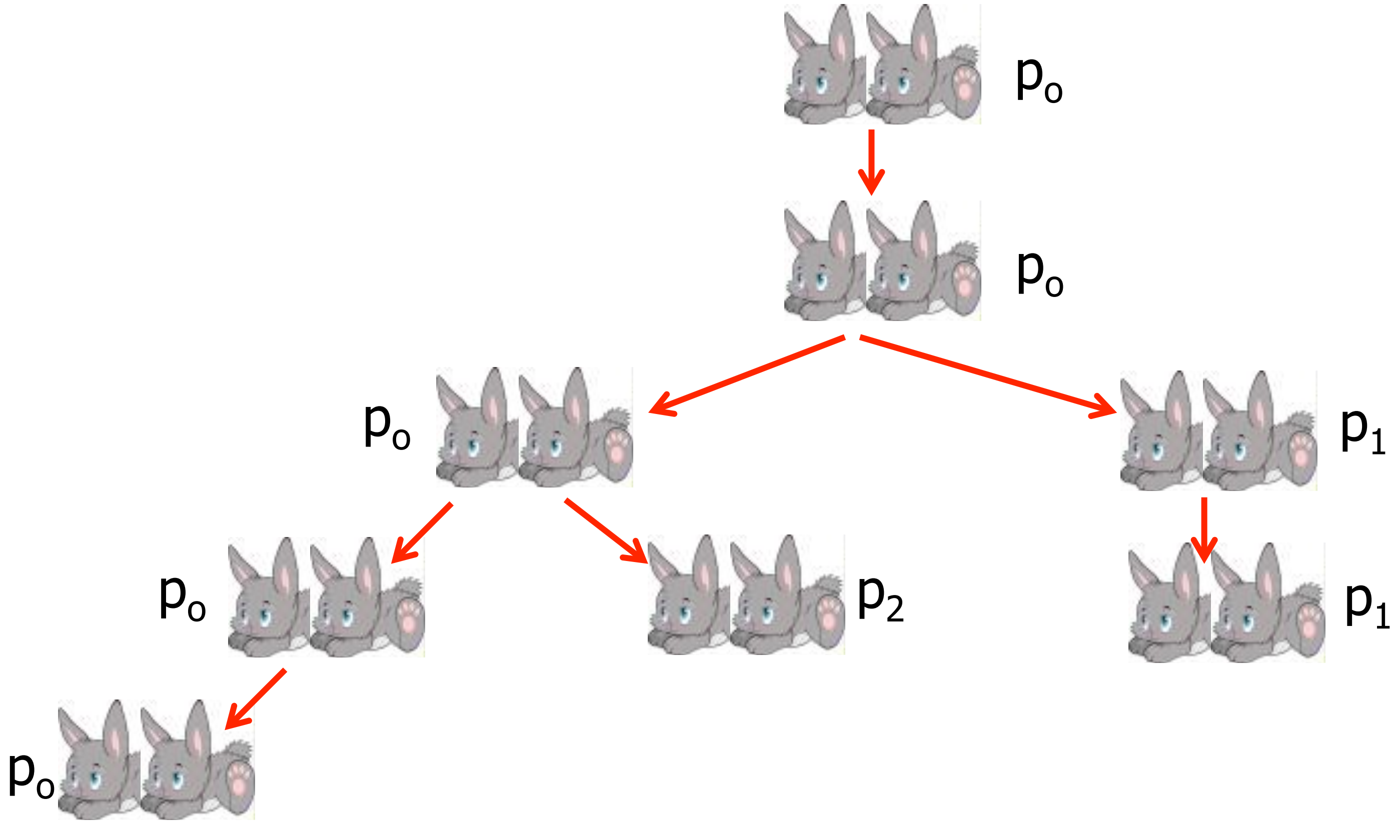
Relação de Fibonacci



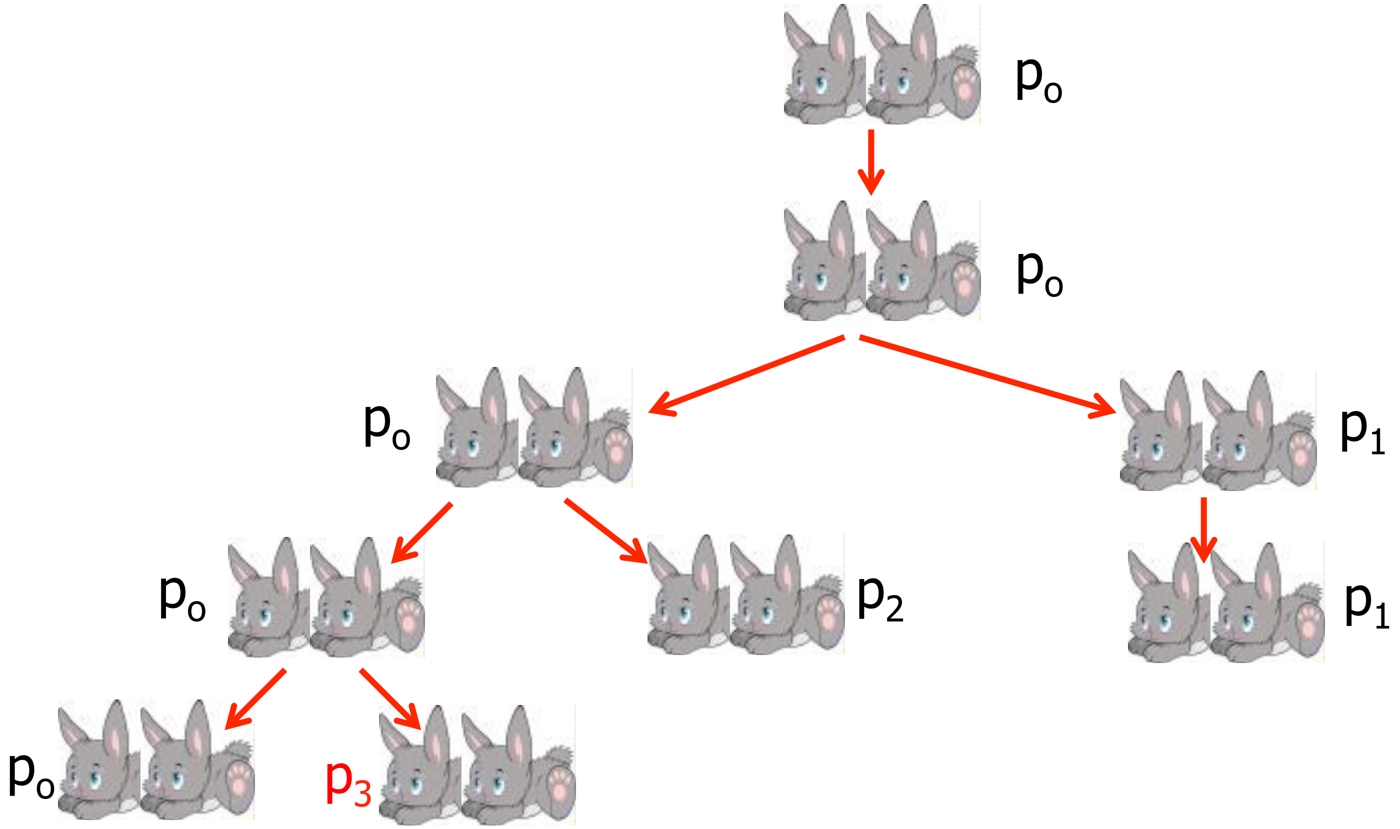
Relação de Fibonacci



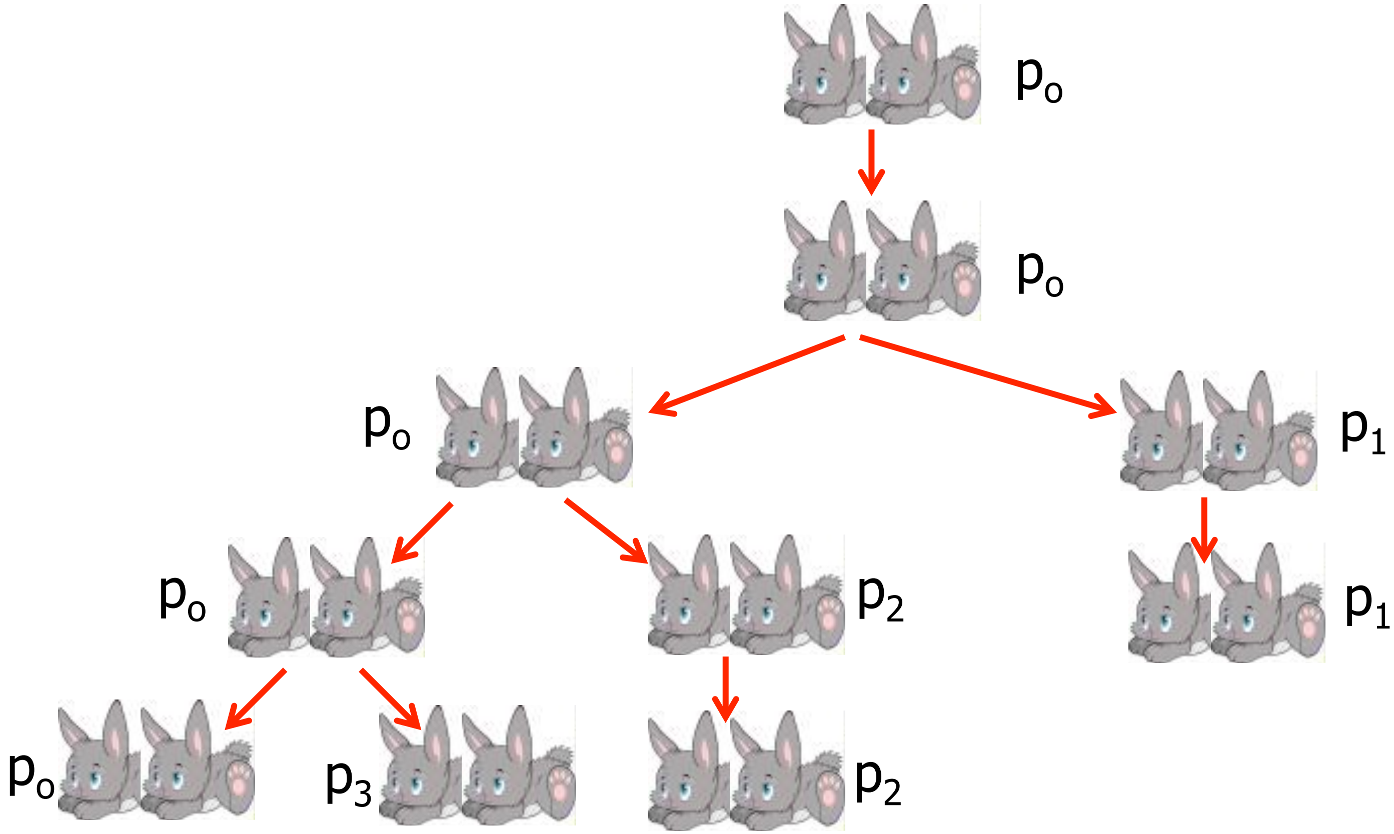
Relação de Fibonacci



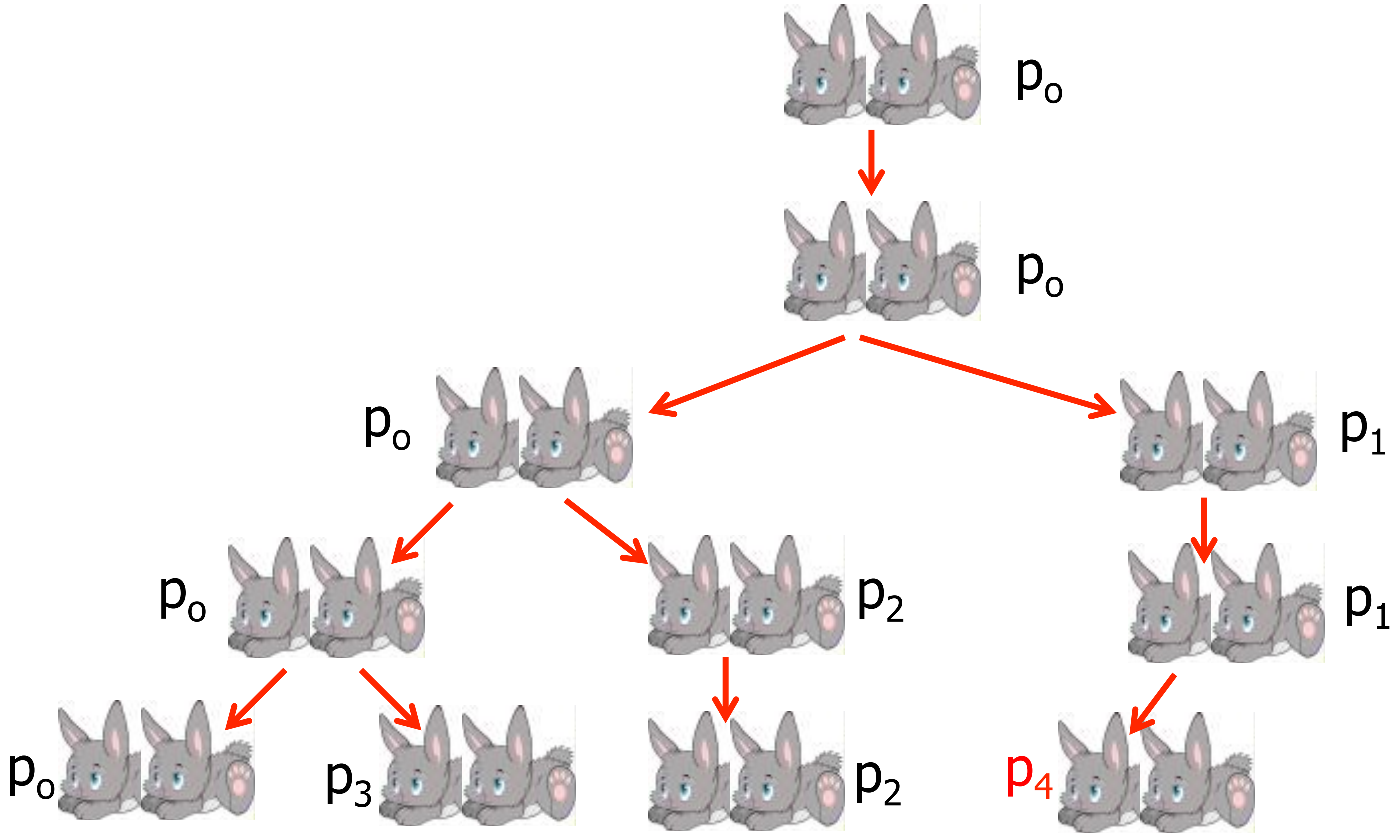
Relação de Fibonacci



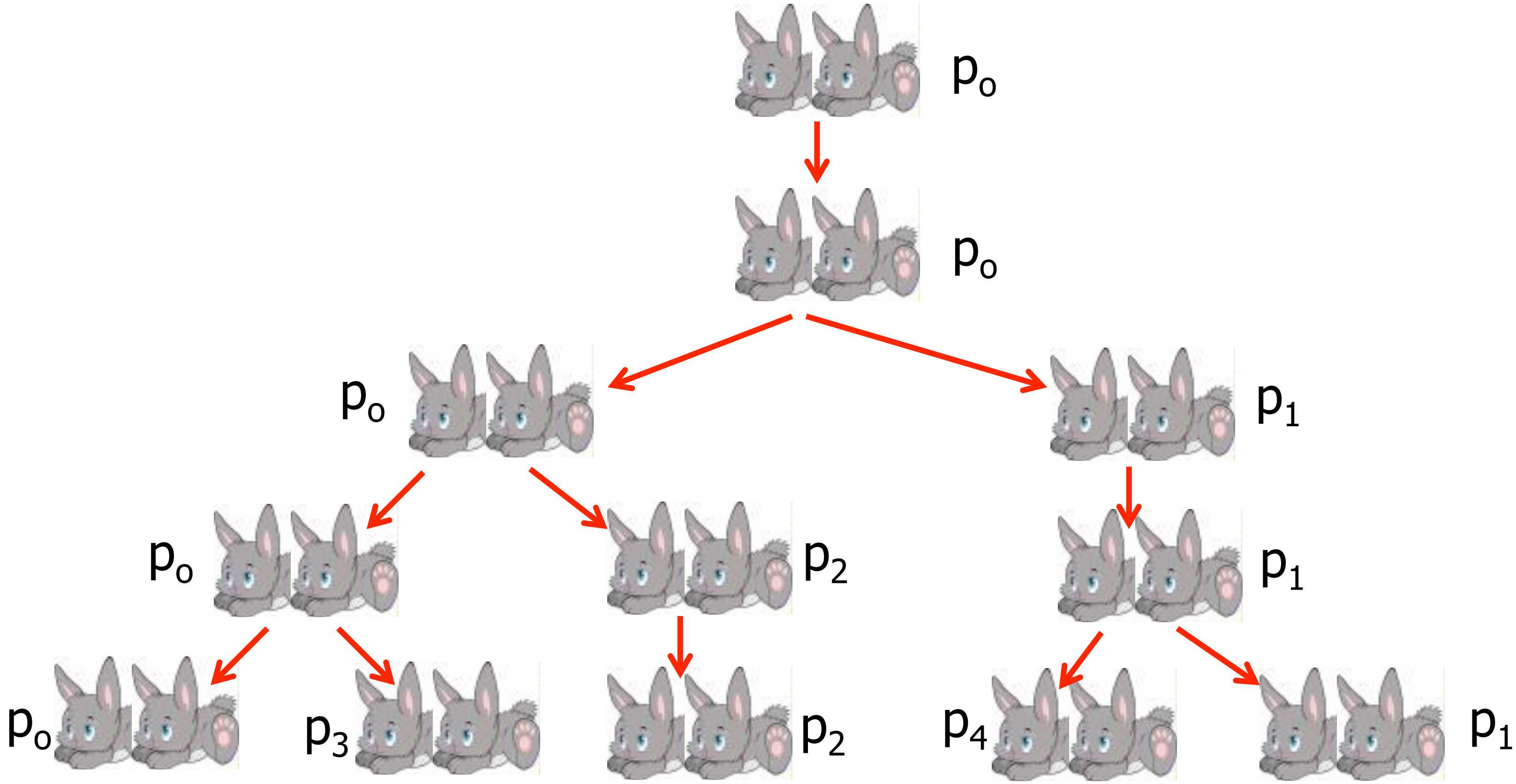
Relação de Fibonacci



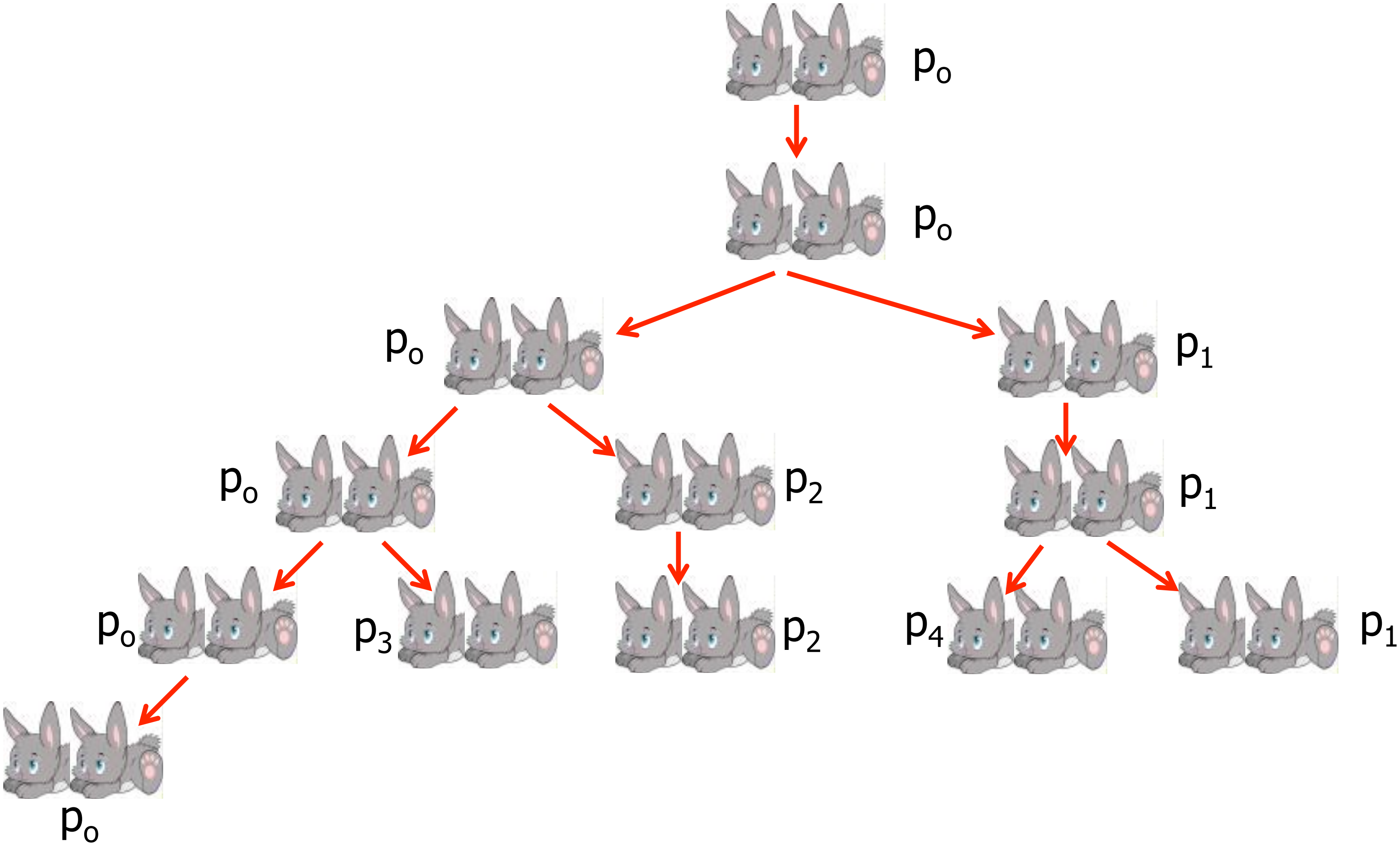
Relação de Fibonacci



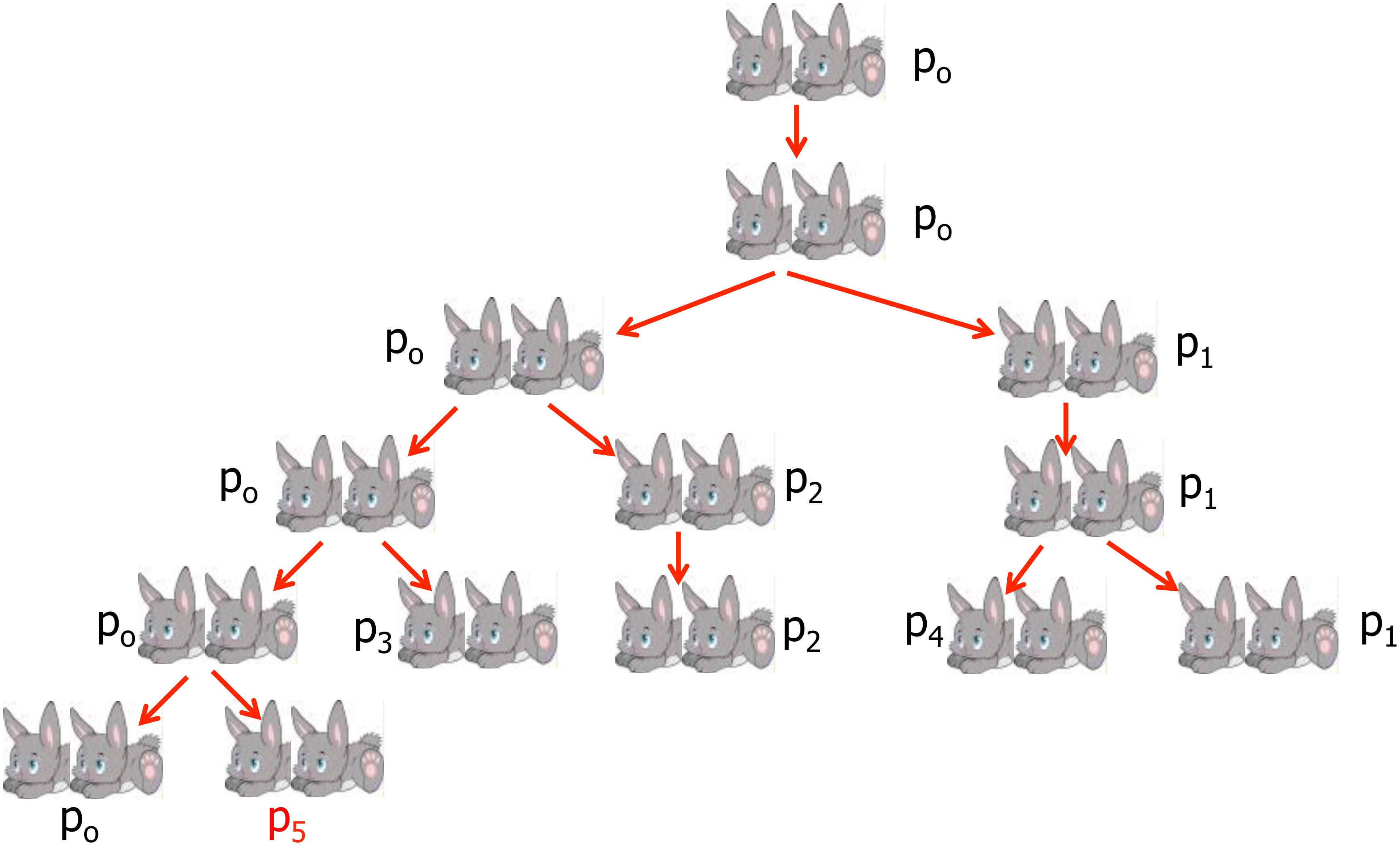
Relação de Fibonacci



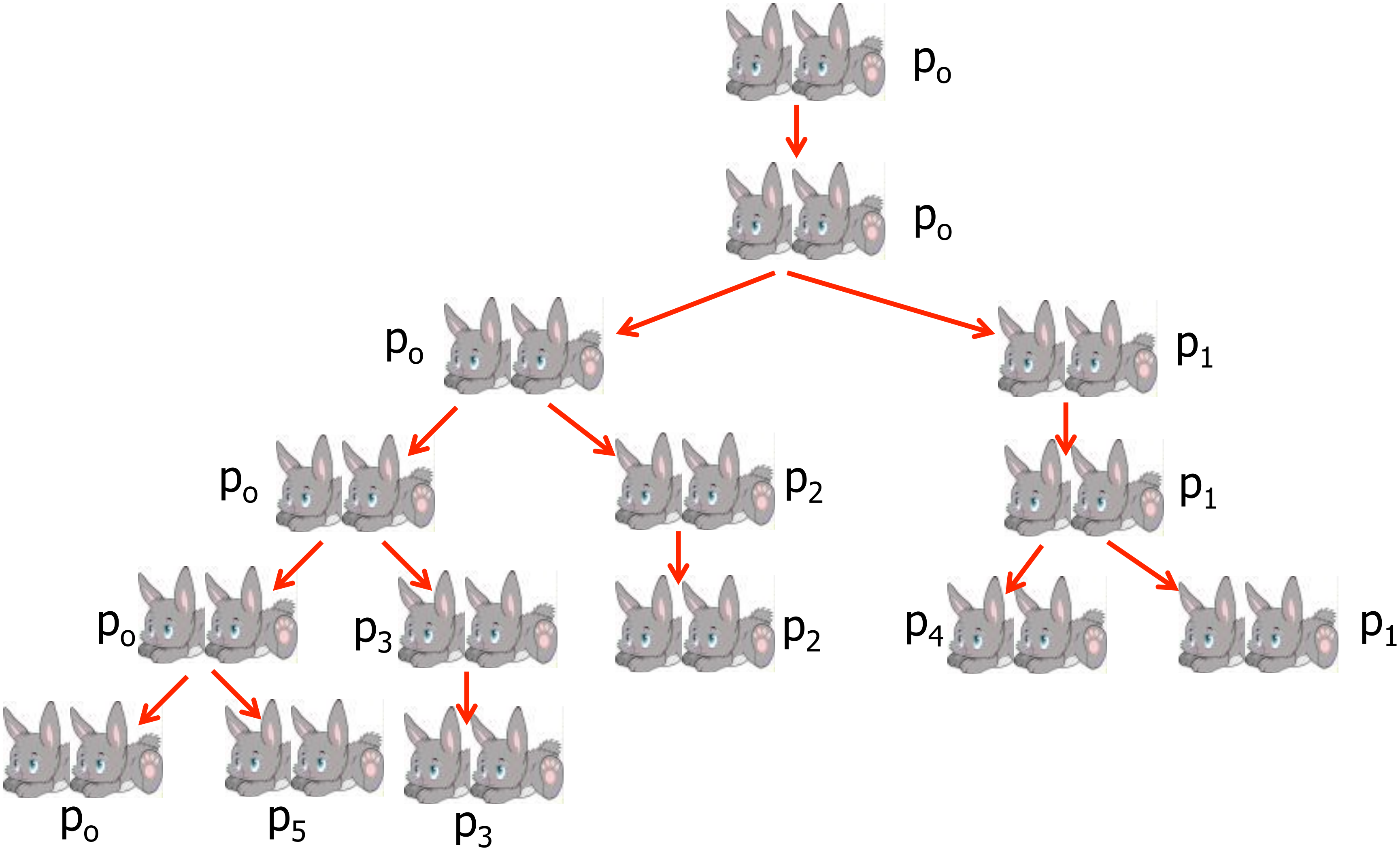
Relação de Fibonacci



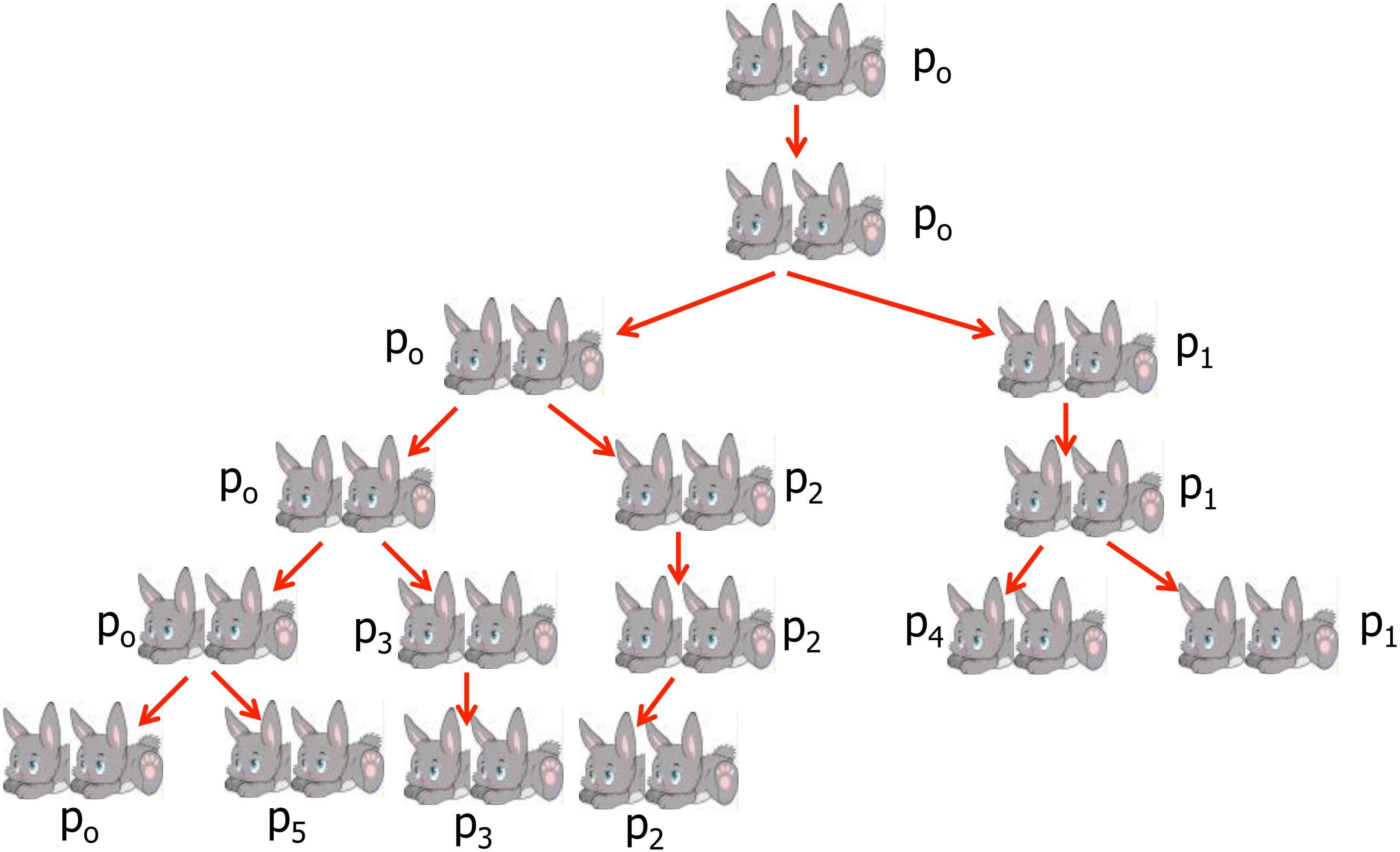
Relação de Fibonacci



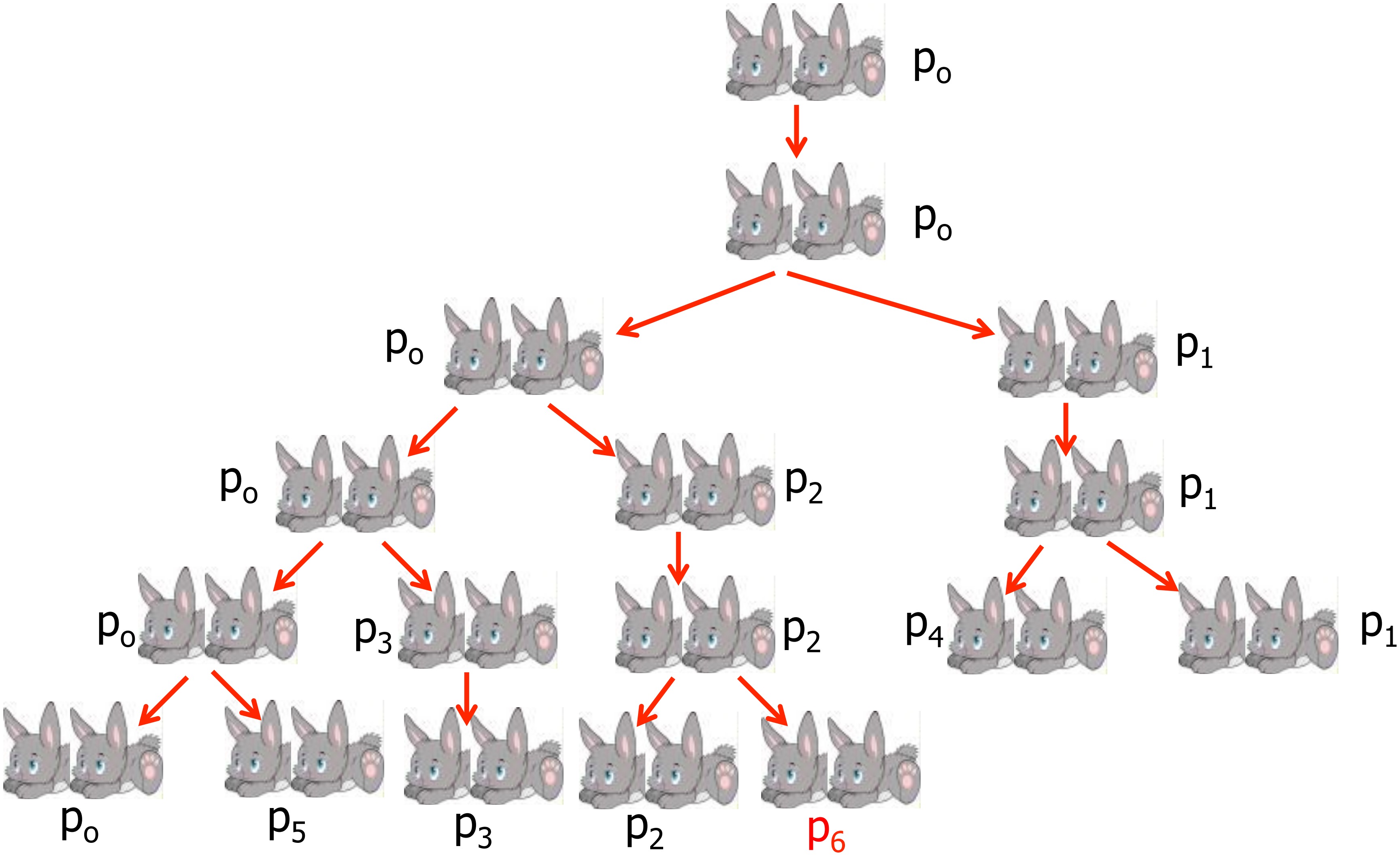
Relação de Fibonacci



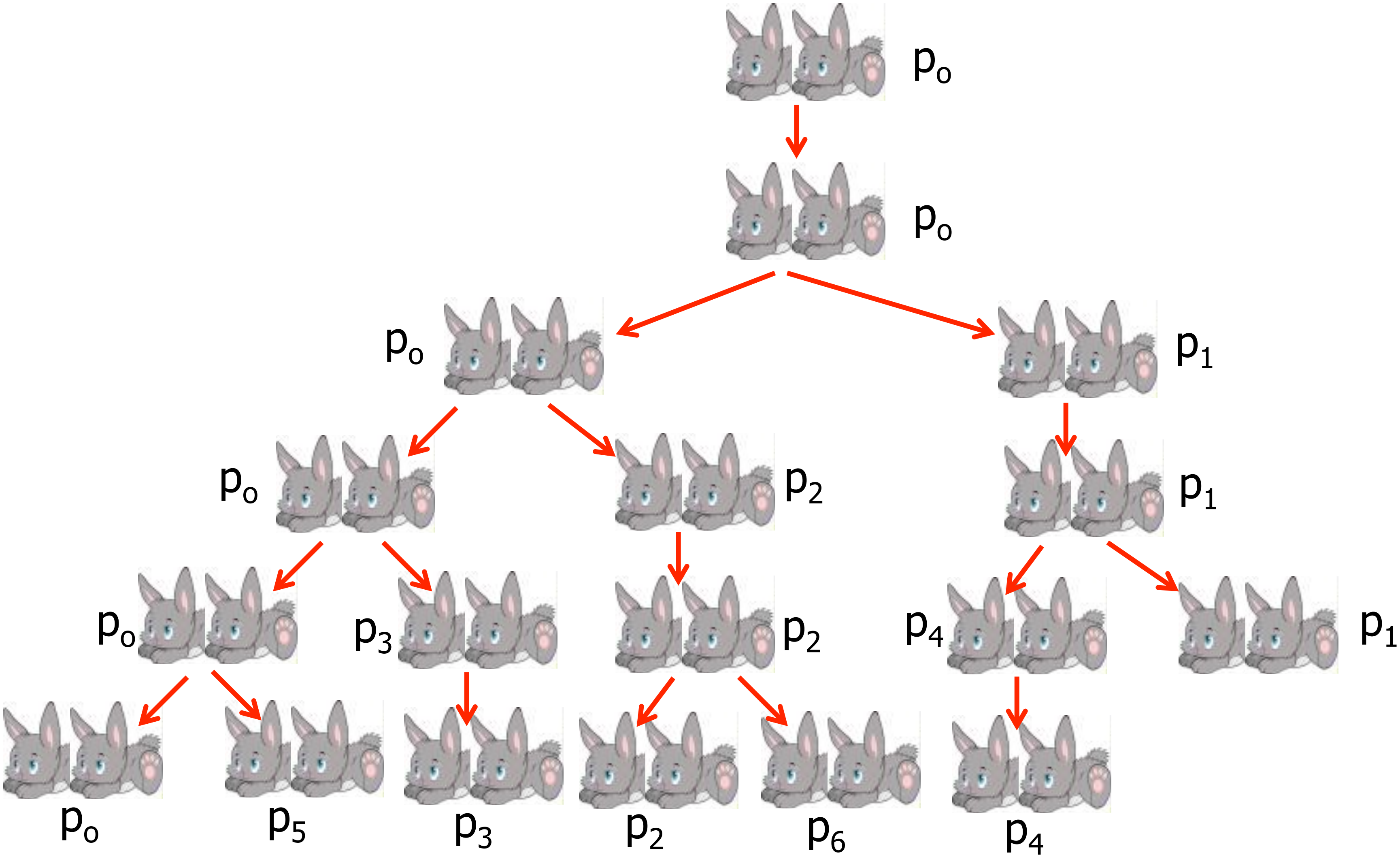
Relação de Fibonacci



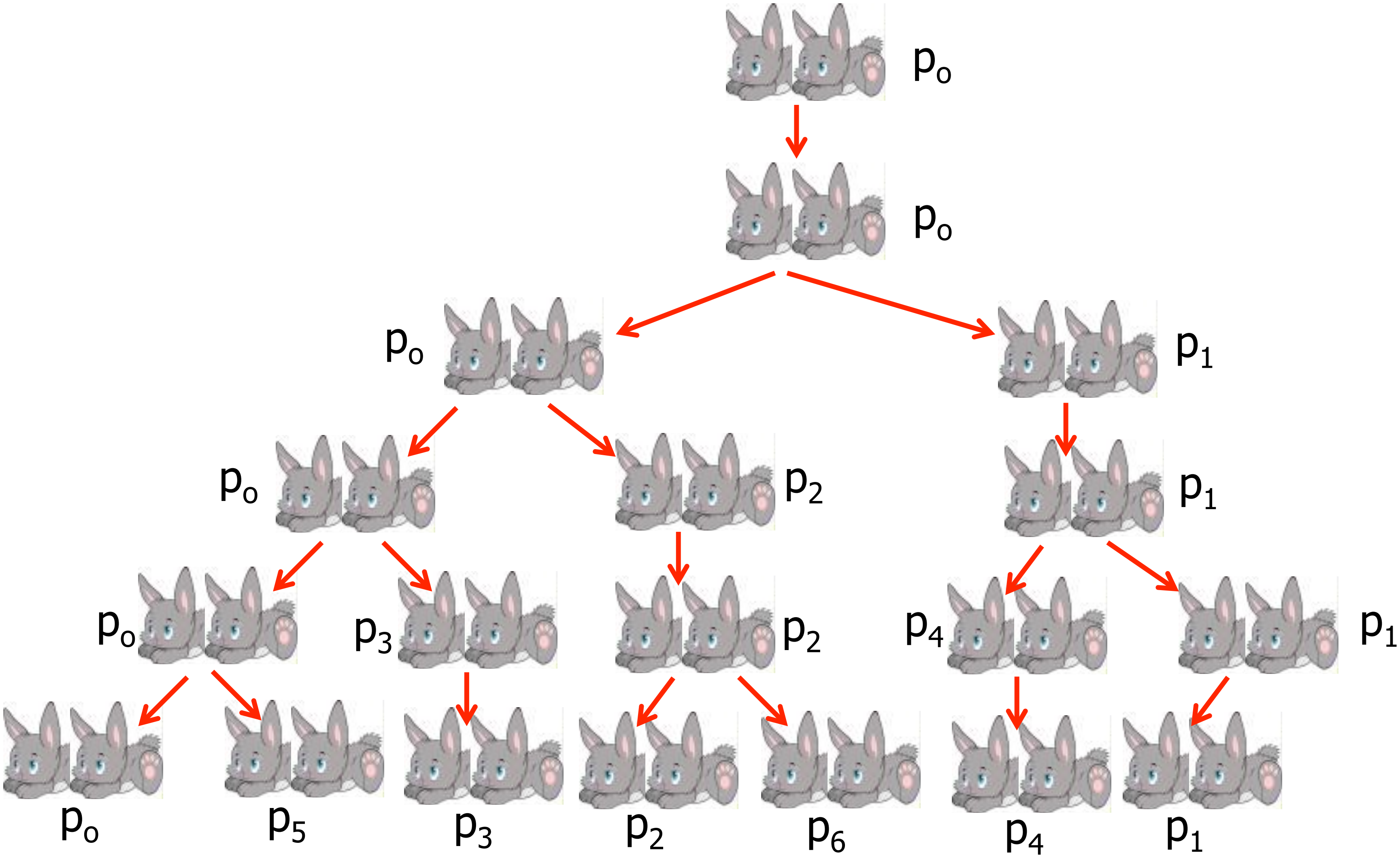
Relação de Fibonacci



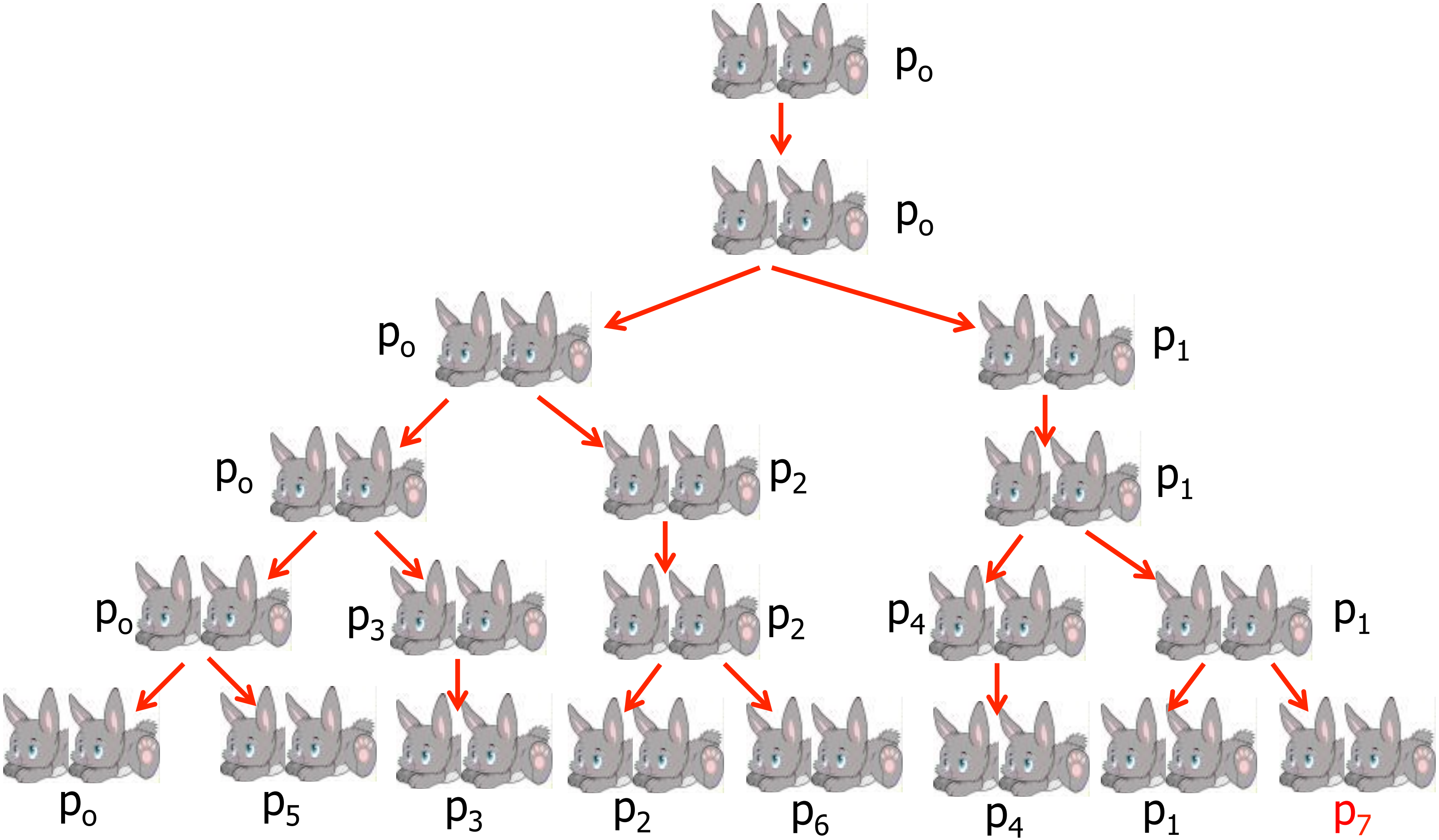
Relação de Fibonacci



Relação de Fibonacci



Relação de Fibonacci

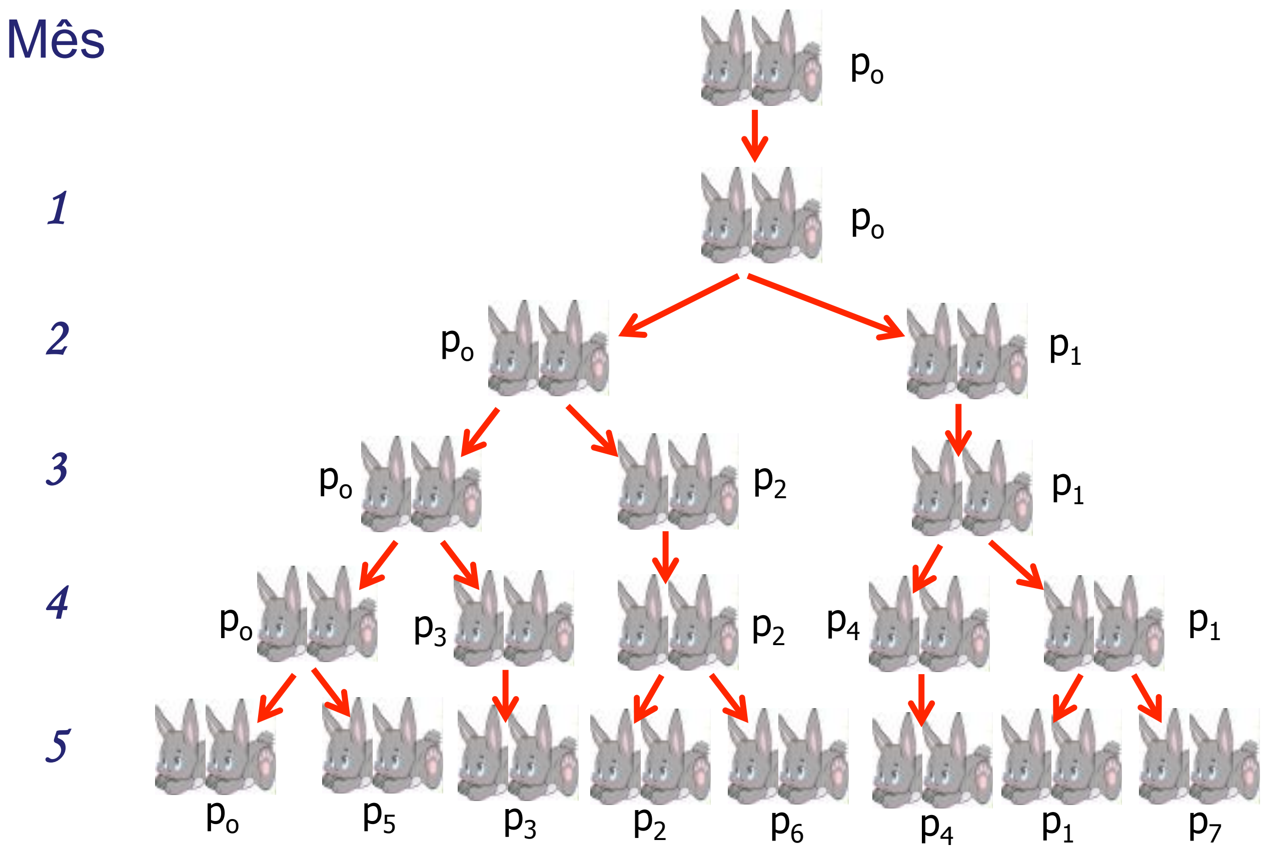


Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.

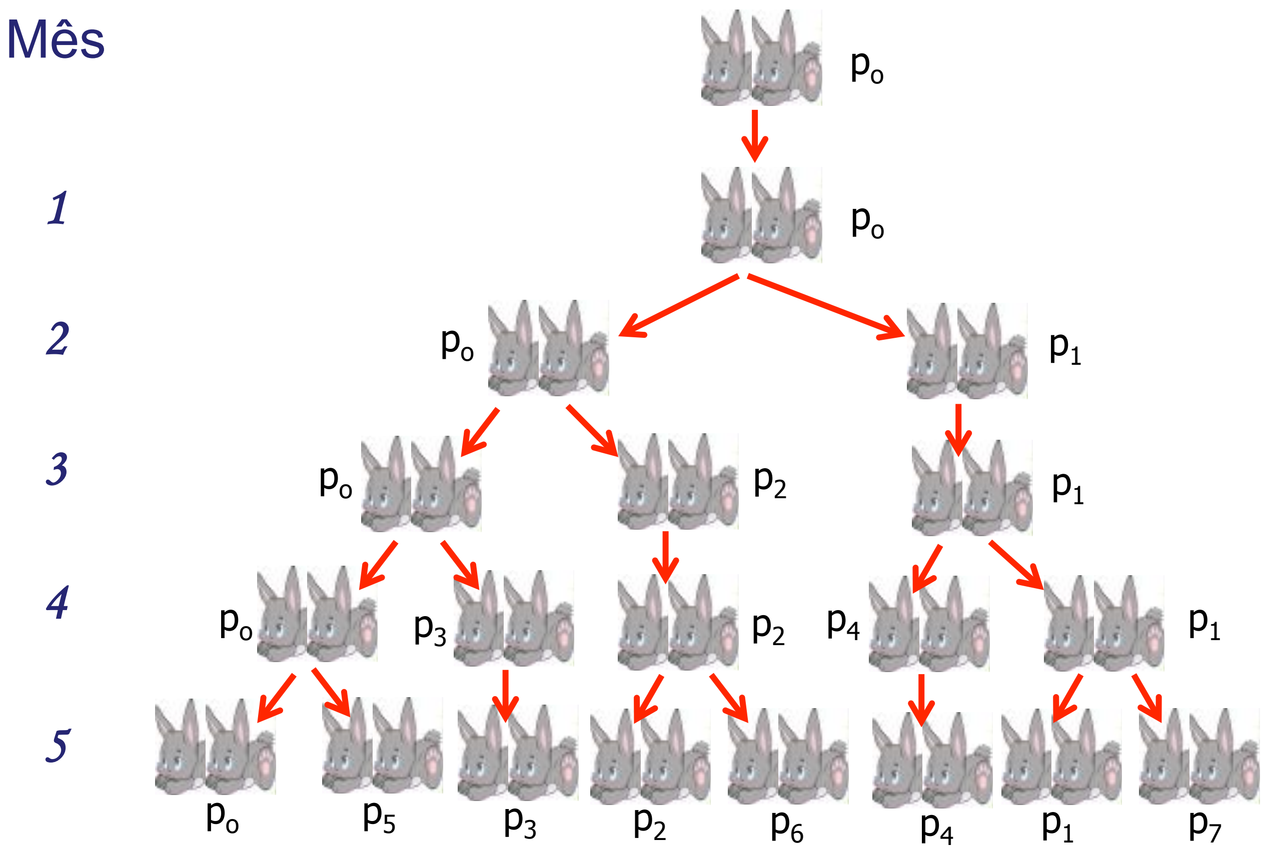
Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



Relação de Fibonacci

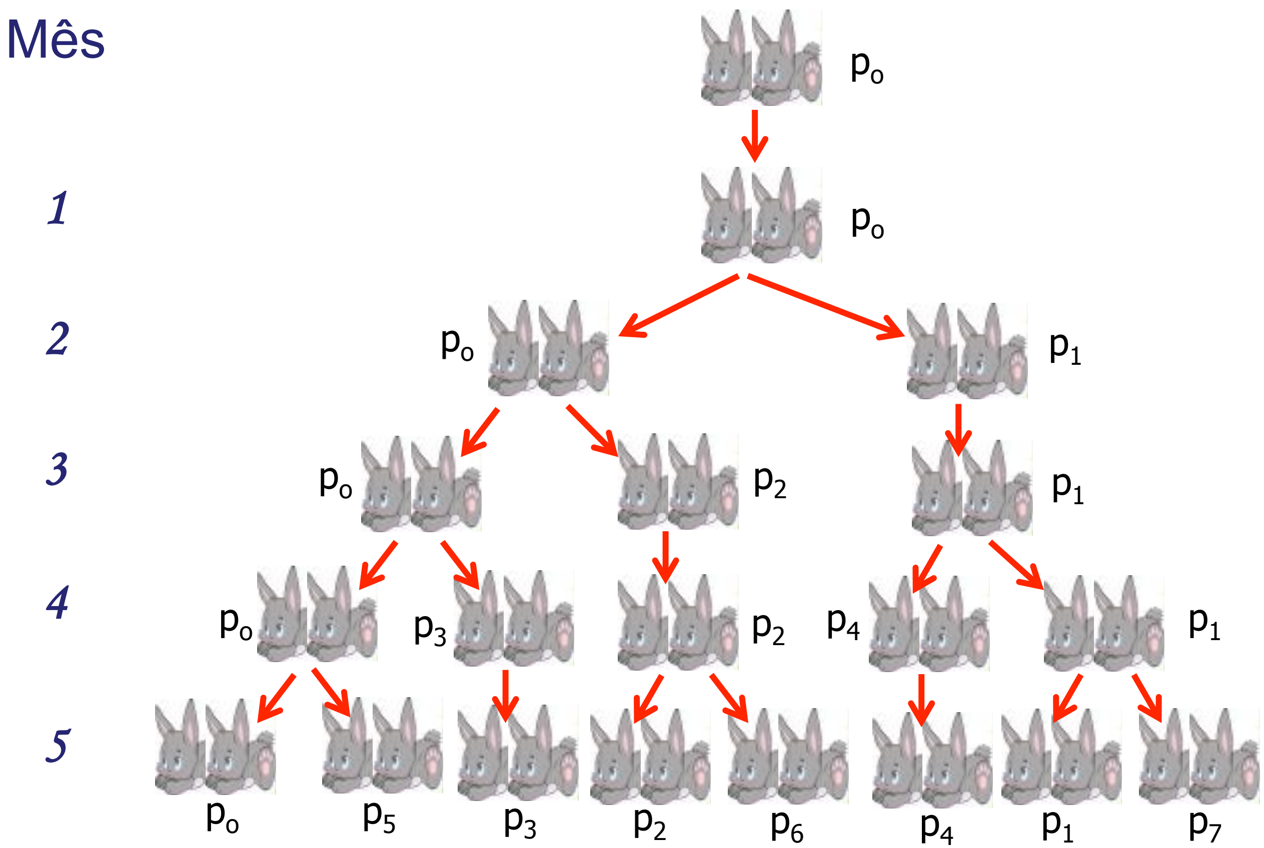
F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



$F_0=\underbrace{1}_{p_0}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.

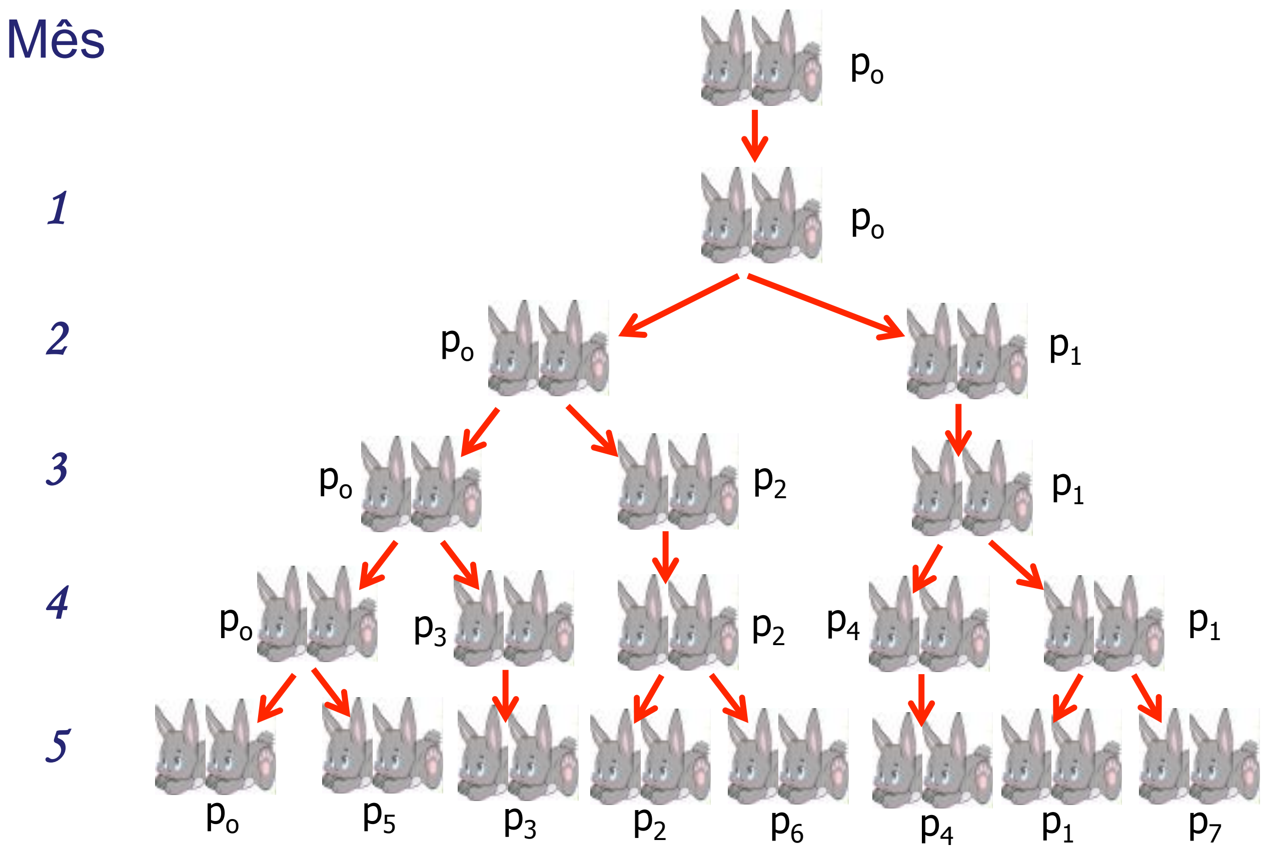


$F_0=\underbrace{1}_{p_0}$

$F_1=\underbrace{1}_{p_0}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n (n $\in$ **N**).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



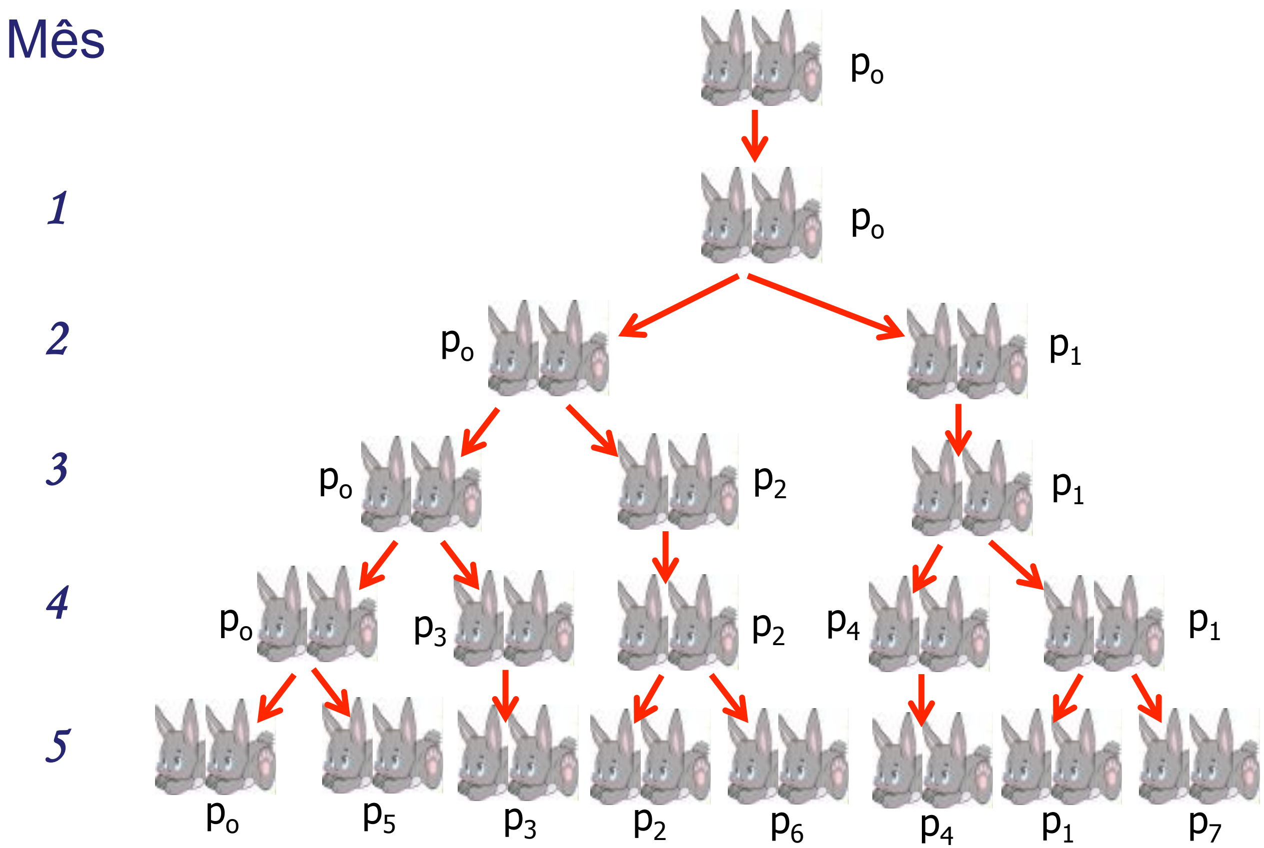
$F_0=\underbrace{1}_{p_0}$

$F_1=\underbrace{1}_{p_0}$

$F_2=\underbrace{F_1}_{p_1} + \underbrace{1}_{p_0}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



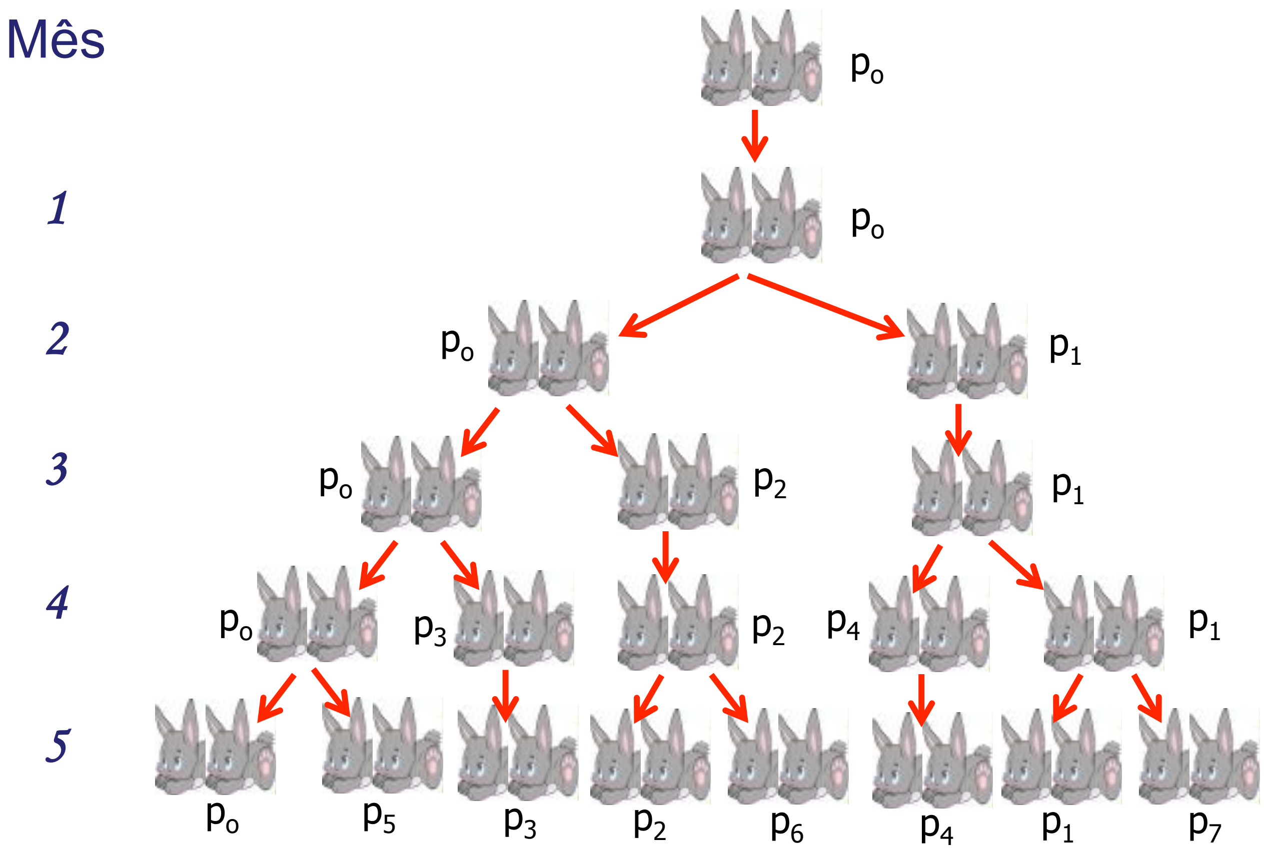
$F_0 = \underbrace{1}_{p_0}$

$F_1 = \underbrace{1}_{p_0}$

$F_2 = \underbrace{F_1}_{p_1} + \underbrace{F_0}_{p_0}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



$F_0 = \underbrace{1}_{p_0}$

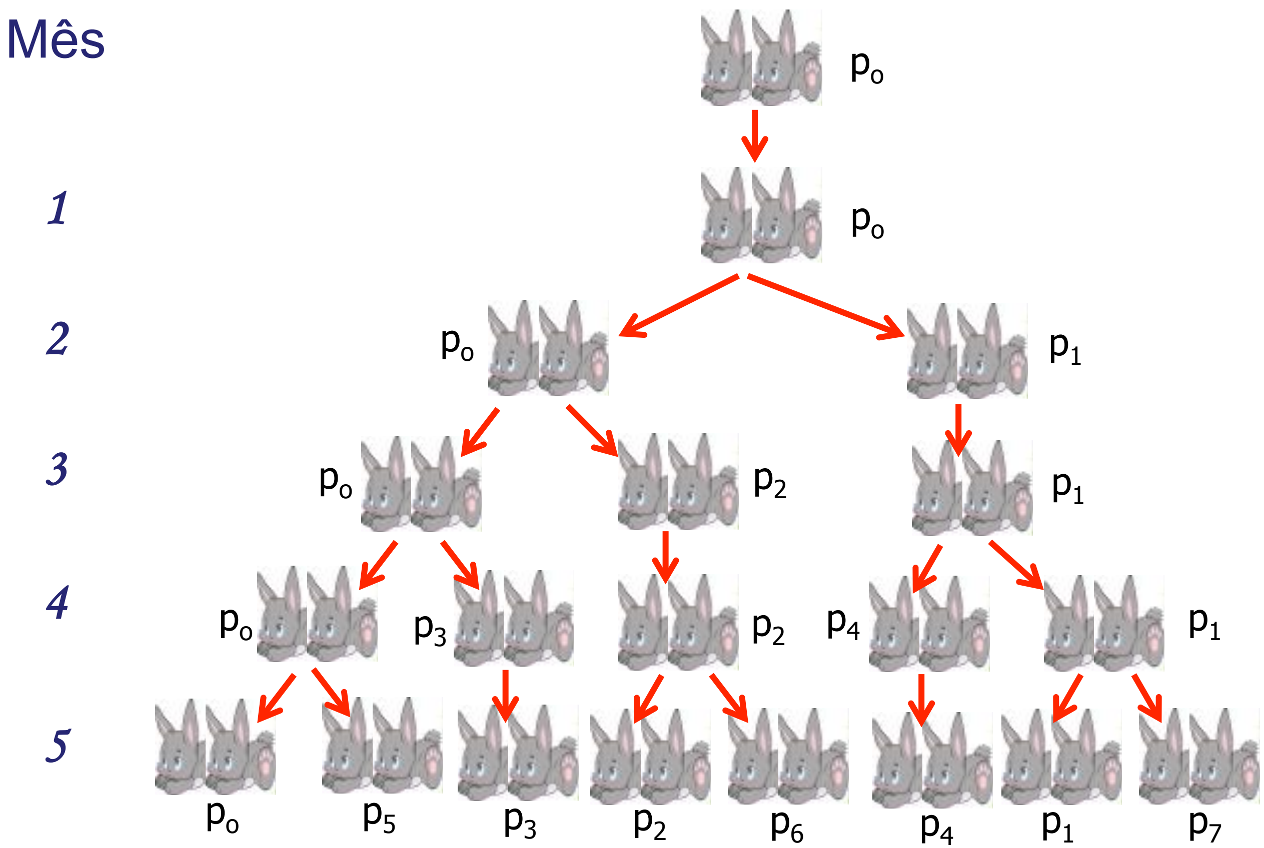
$F_1 = \underbrace{1}_{p_0}$

$F_2 = \underbrace{F_1}_{p_1} + \underbrace{F_0}_{p_0}$

$F_3 = F_2 + \underbrace{1}_{p_2}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



$F_0 = \underbrace{1}_{p_0}$

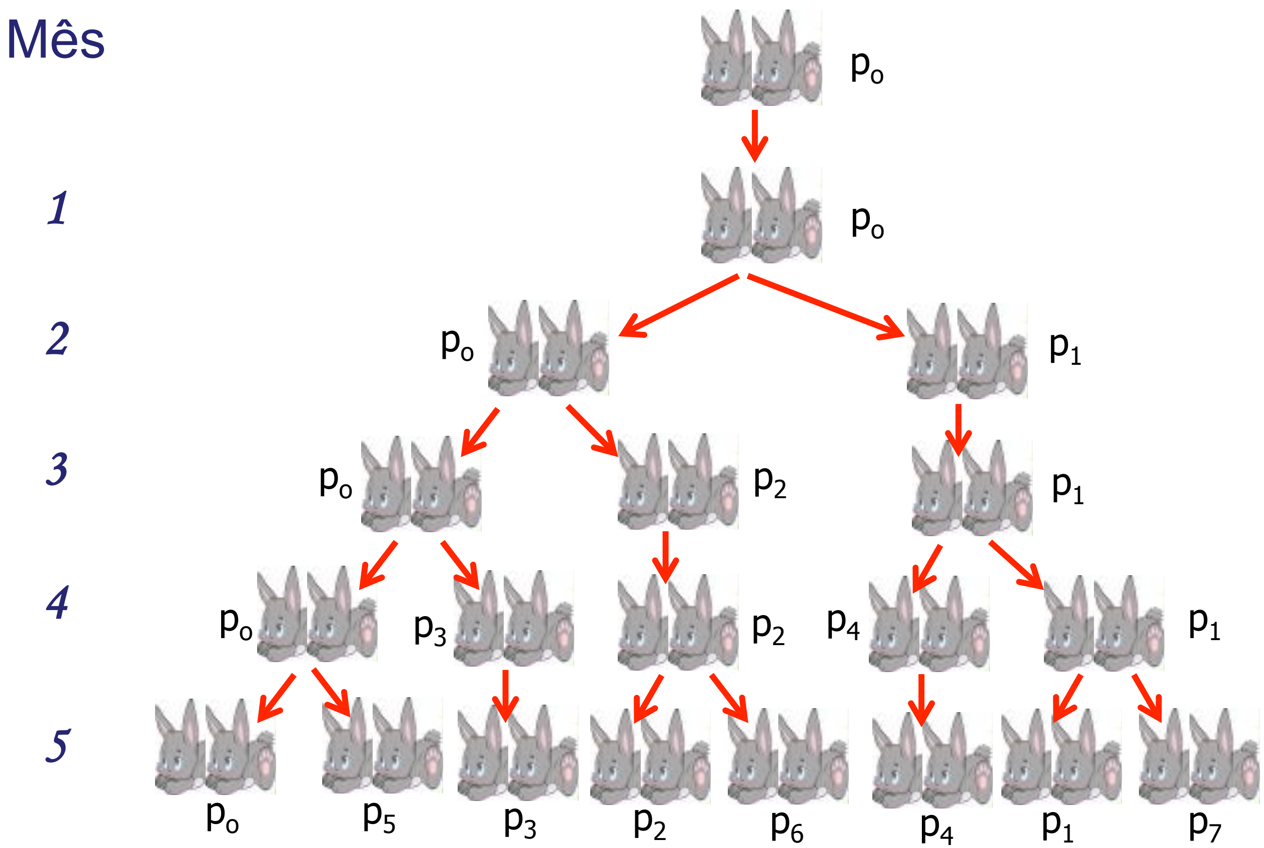
$F_1 = \underbrace{1}_{p_0}$

$F_2 = \underbrace{F_1}_{p_1} + \underbrace{F_0}_{p_0}$

$F_3 = F_2 + \underbrace{F_1}_{p_2}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



$F_0=\underbrace{1}_{p_0}$

$F_1=\underbrace{1}_{p_0}$

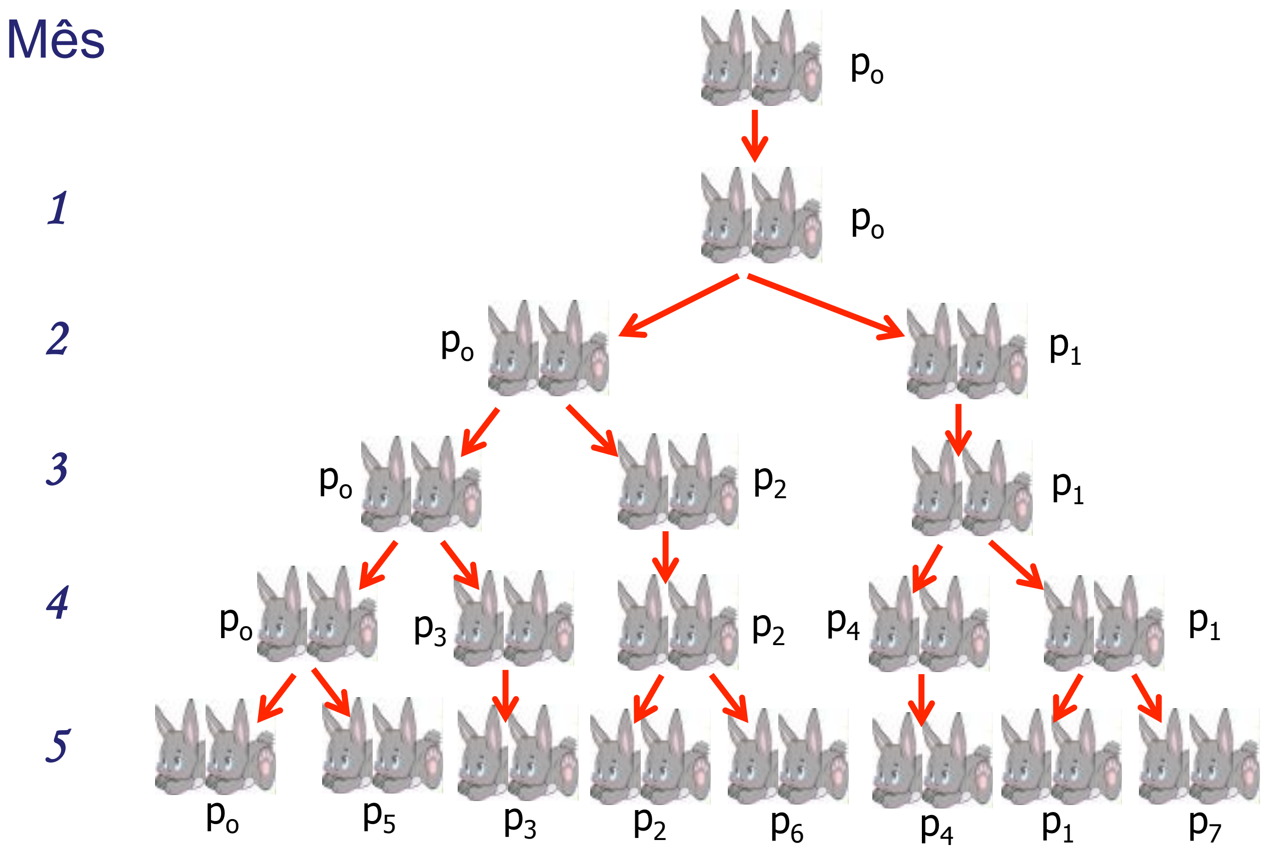
$F_2=\underbrace{F_1}_{p_1}+\underbrace{F_0}_{p_0}$

$F_3=F_2+\underbrace{F_1}_{p_2}$

$F_4=F_3+\underbrace{1}_{p_3}+\underbrace{1}_{p_4}$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n (n $\in$ **N**).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



$F_0 = \underbrace{1}_{p_0}$

$F_1 = \underbrace{1}_{p_0}$

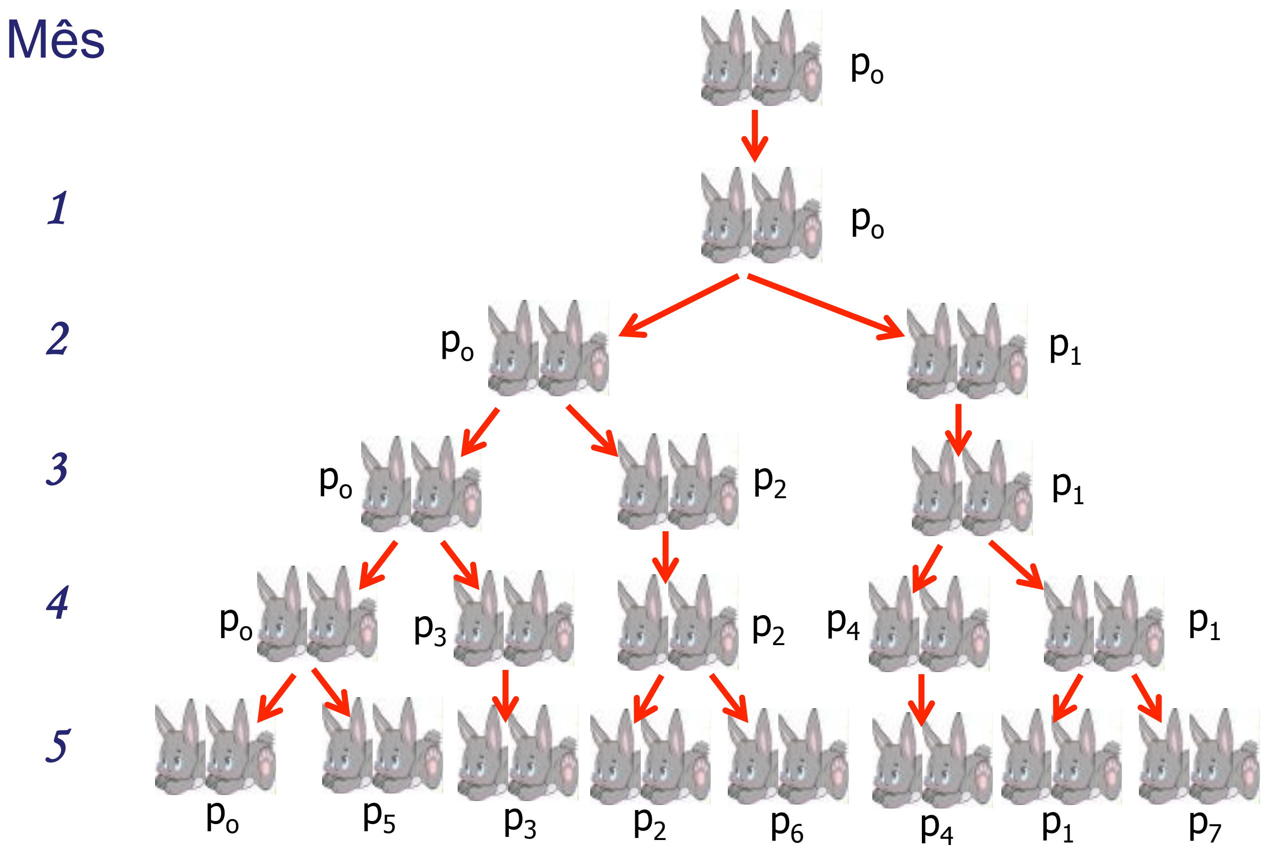
$F_2 = \underbrace{F_1}_{p_1} + \underbrace{F_0}_{p_0}$

$F_3 = F_2 + \underbrace{F_1}_{p_2}$

$F_4 = F_3 + F_2$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.



$$F_0=\underbrace{1}_{p_0}$$

$$F_1=\underbrace{1}_{p_0}$$

$$F_2=\underbrace{F_1}_{p_1} + \underbrace{F_0}_{p_0}$$

$$F_3=F_2 + \underbrace{F_1}_{p_2}$$

$$F_4=F_3 + F_2$$

$$F_5=F_4 + F_3$$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n (n $\in$ **N**).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.

A relação de recorrência é:

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & , n > 1 \\ 1 & , n=0, 1 \end{cases}$$

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n (n $\in$ **N**).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.

A relação de recorrência é:

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & , n > 1 \\ 1 & , n=0, 1 \end{cases}$$

condições iniciais

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.

A relação de recorrência é:

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & , n > 1 \\ 1 & , n=0, 1 \end{cases}$$

condições iniciais

Sequência de Fibonacci: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13,⋯

Relação de Fibonacci

F_n: número de pares de coelhos no final do mês n ($n \in \mathbf{N}$).
F_0: número de pares de coelhos no início do processo.

A relação de recorrência é:

$$F_n = \begin{cases} F_{n-1} + F_{n-2} & , n > 1 \\ 1 & , n=0, 1 \end{cases}$$

condições iniciais

Sequência de Fibonacci: 1,1, 2, 3, 5, 8, 13,⋯

Obs.: Nosso interesse é obter a solução de uma relação de recorrência para obter uma expressão geral para o n-ésimo número da sequência.

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para $k = 2,3,\ldots,12$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

✓ $F_0=1$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para $k = 2,3,\ldots,12$

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$
- ✓ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$
- ✓ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$
- ✓ $F_9 = F_8 + F_7 = 55$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$
- ✓ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$
- ✓ $F_9 = F_8 + F_7 = 55$
- ✓ $F_{10} = F_9 + F_8 = 89$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$
- ✓ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$
- ✓ $F_9 = F_8 + F_7 = 55$
- ✓ $F_{10} = F_9 + F_8 = 89$
- ✓ $F_{11} = F_{10} + F_9 = 144$

Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$
- ✓ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$
- ✓ $F_9 = F_8 + F_7 = 55$
- ✓ $F_{10} = F_9 + F_8 = 89$
- ✓ $F_{11} = F_{10} + F_9 = 144$
- ✓ $F_{12} = F_{11} + F_{10} = 233$

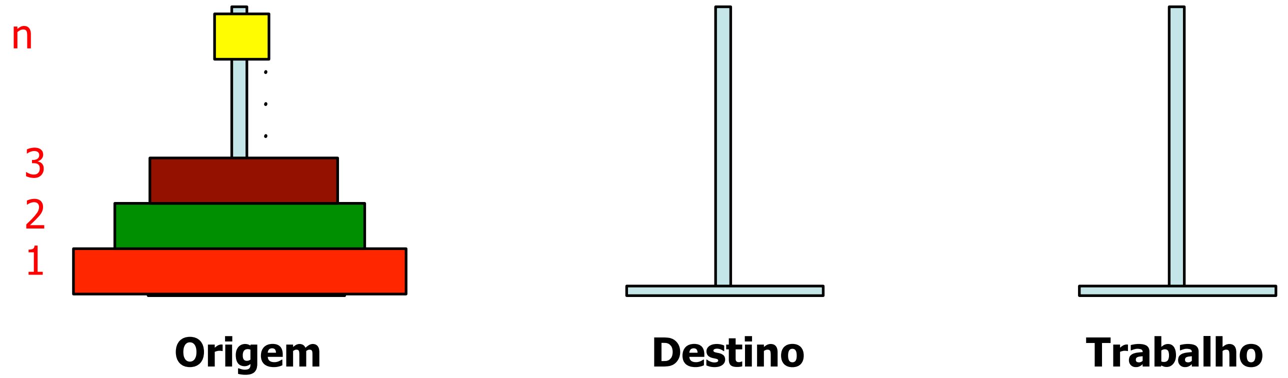
Relação de Fibonacci

Cálculo de F_{12}: usamos $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$, para k = 2,3,…,12

- ✓ $F_0=1$
- ✓ $F_1=1$
- ✓ $F_2= F_1 + F_0 = 2$
- ✓ $F_3 = F_2 + F_1 = 3$
- ✓ $F_4 = F_3 + F_2 = 5$
- ✓ $F_5 = F_4 + F_3 = 8$
- ✓ $F_6 = F_5 + F_4 = 13$
- ✓ $F_7 = F_6 + F_5 = 21$
- ✓ $F_8 = F_7 + F_6 = 34$
- ✓ $F_9 = F_8 + F_7 = 55$
- ✓ $F_{10} = F_9 + F_8 = 89$
- ✓ $F_{11} = F_{10} + F_9 = 144$
- ✓ $F_{12} = F_{11} + F_{10} = 233$

Problema da Torre de Hanói

Situação Inicial



Problema da Torre de Hanói

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar n discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

Problema da Torre de Hanói

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar n discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

(a) Só é permitido mover um disco do topo para um outro eixo.

Problema da Torre de Hanói

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar n discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

(a) Só é permitido mover um disco do topo para um outro eixo.
(b) Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

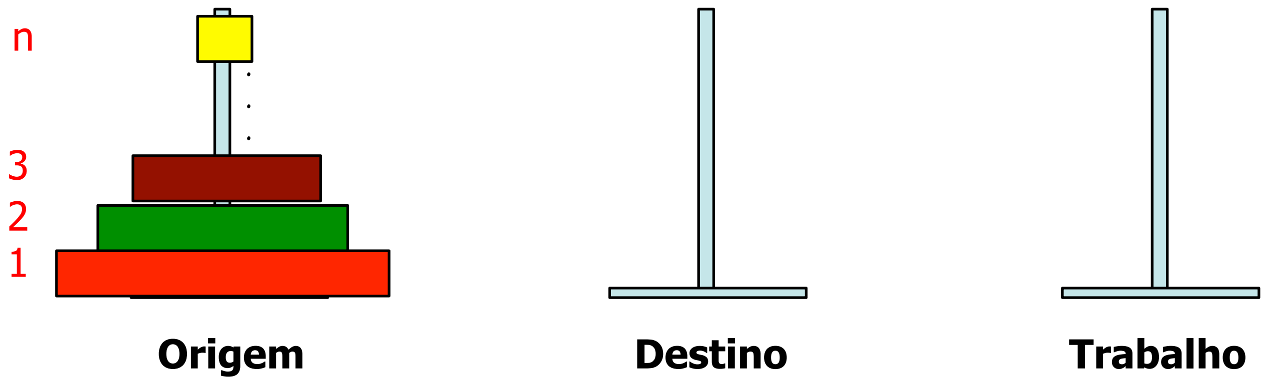
Problema da Torre de Hanói

Determine o menor número de movimentos que são necessários para passar n discos colocados em um eixo, em ordem crescente de tamanho (de cima para baixo), para um outro eixo. Devem ser respeitadas as seguintes regras:

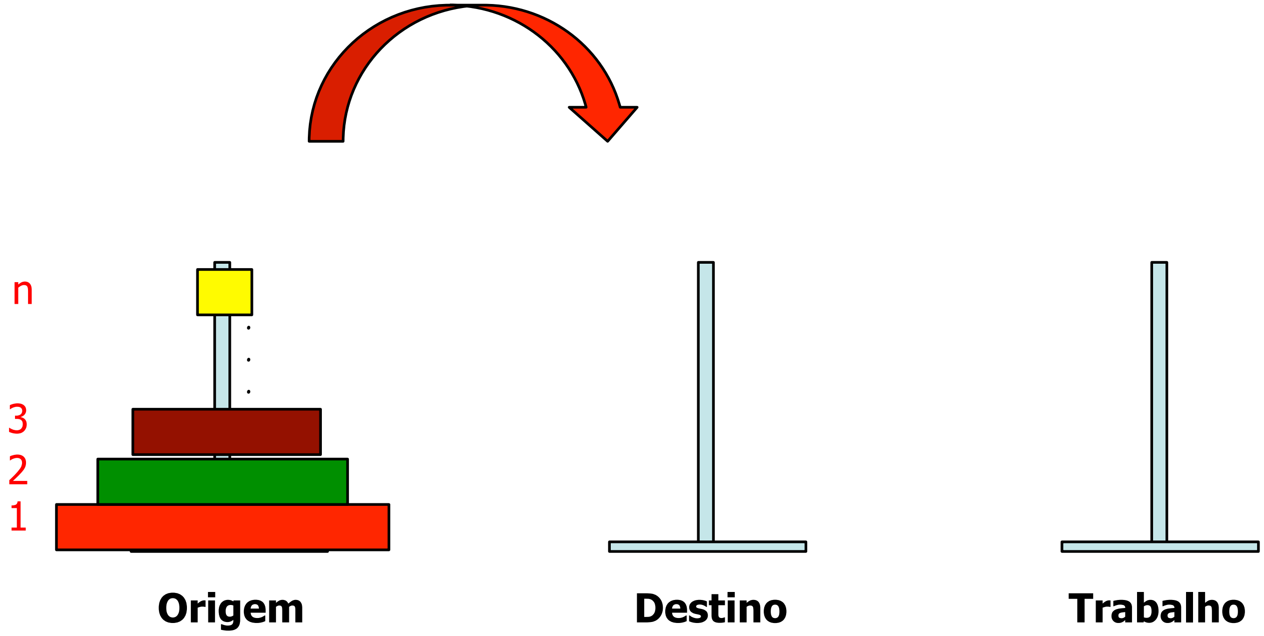
(a) Só é permitido mover um disco do topo para um outro eixo.
(b) Não é permitido colocar um disco maior em cima de um menor.

T_k: número mínimo de movimentos necessários para passar k discos de um eixo a outro nas condições do problema (k = 1,2,...,k)

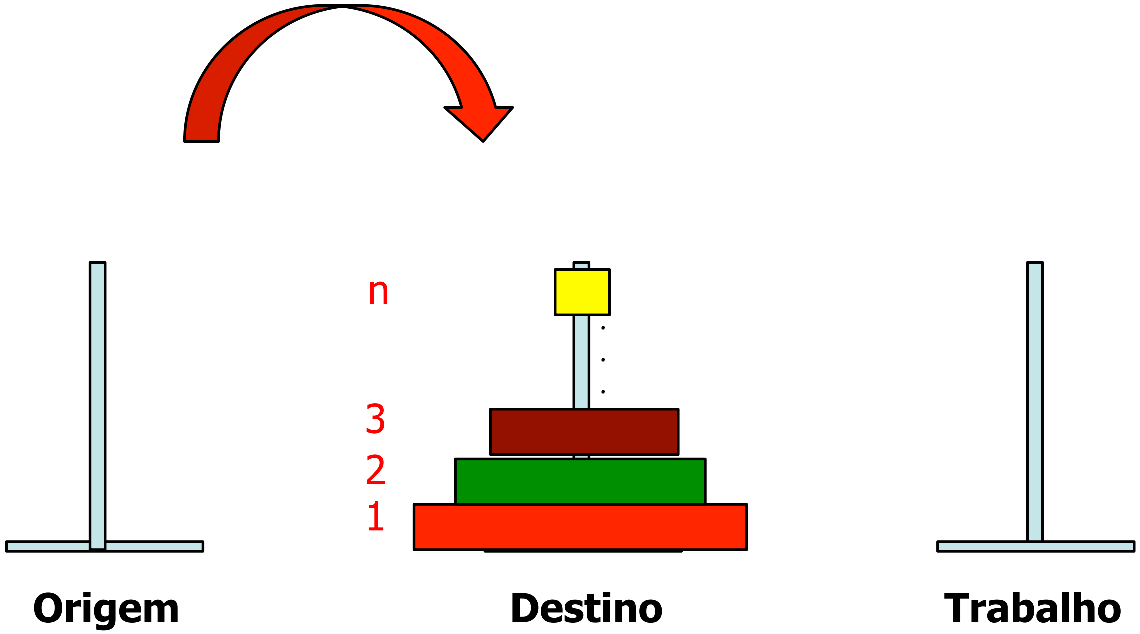
Problema da Torre de Hanói



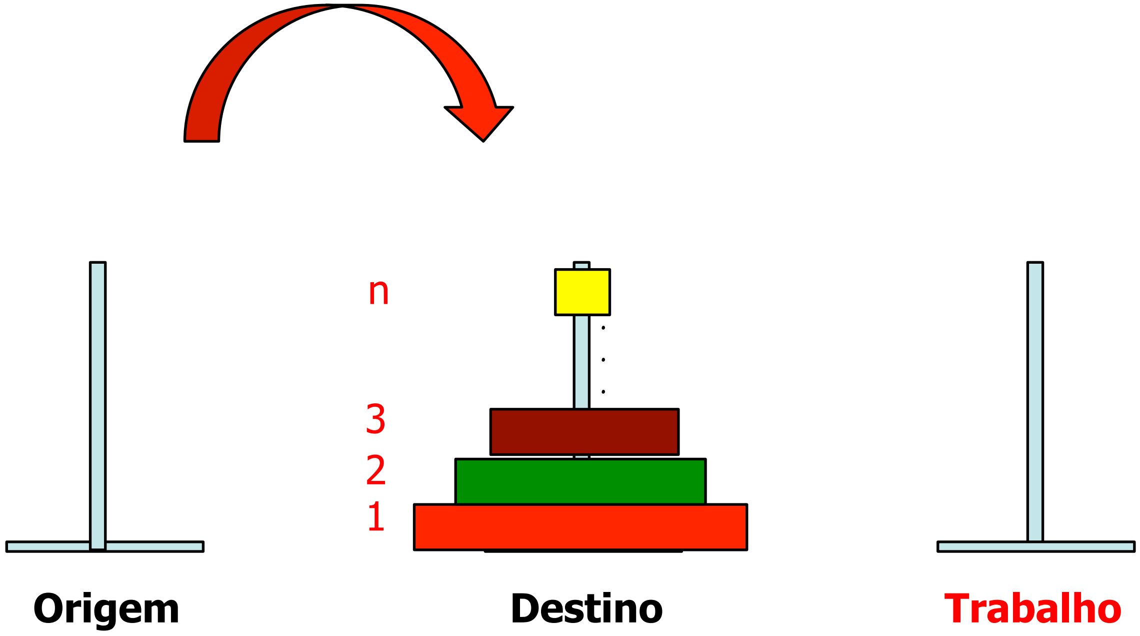
Problema da Torre de Hanói



Problema da Torre de Hanói

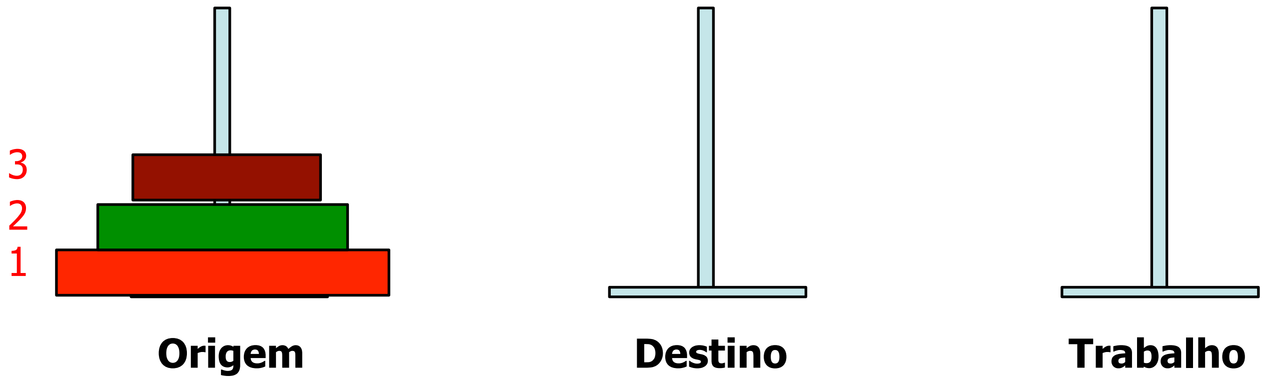


Problema da Torre de Hanói

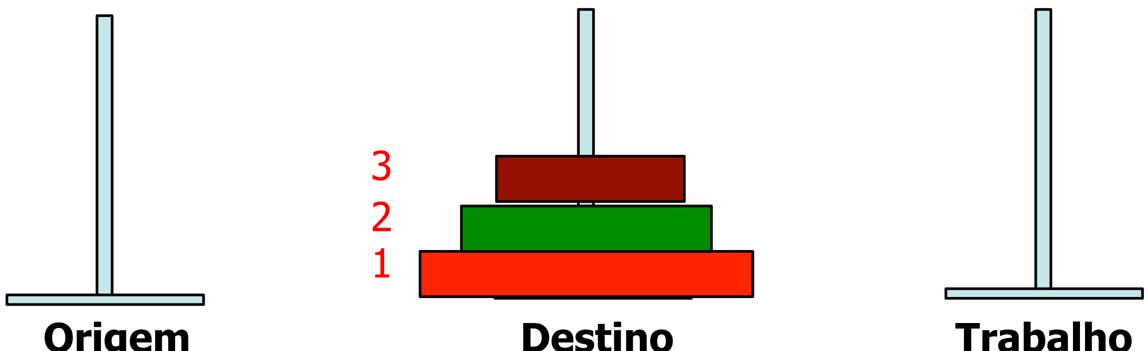


Problema da Torre de Hanói

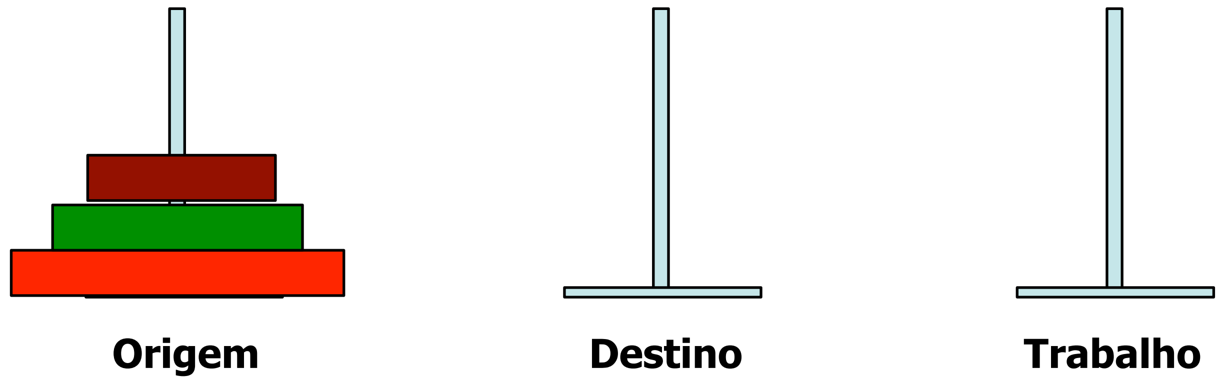
Situação Inicial



Situação Final

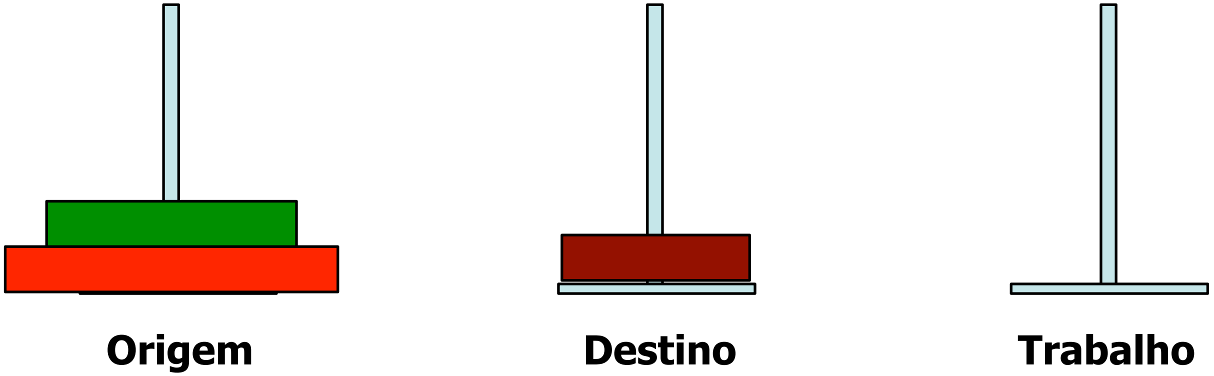


Problema da Torre de Hanói



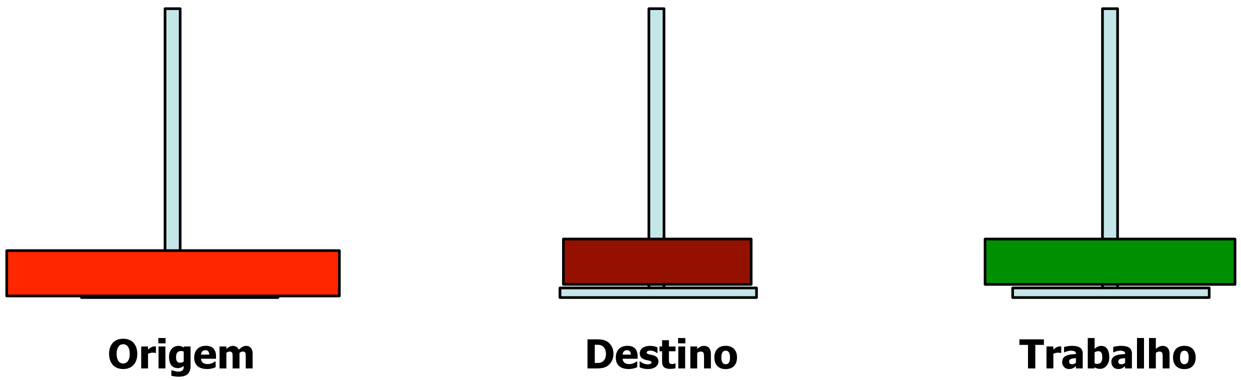
Situação Inicial

Problema da Torre de Hanói



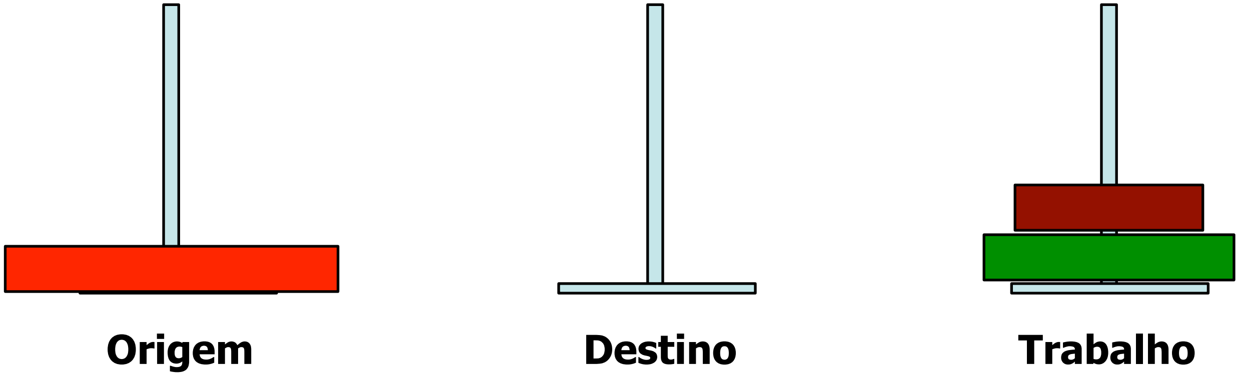
Movimento 1

Problema da Torre de Hanói



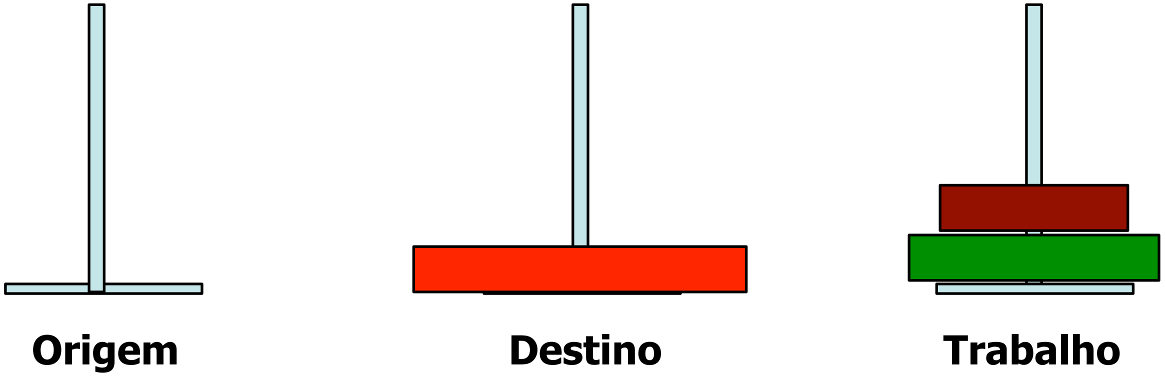
Movimento 2

Problema da Torre de Hanói



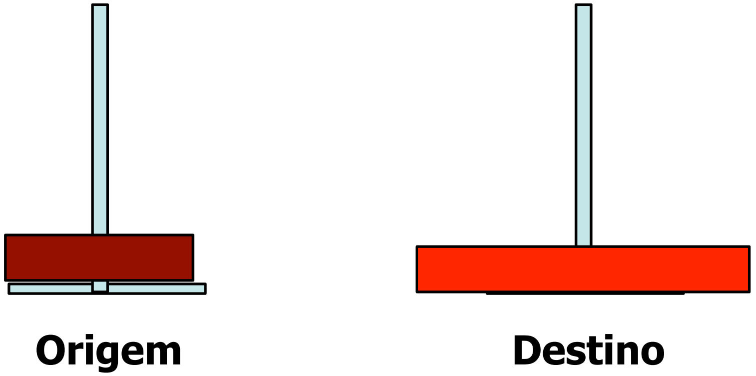
Movimento 3

Problema da Torre de Hanói



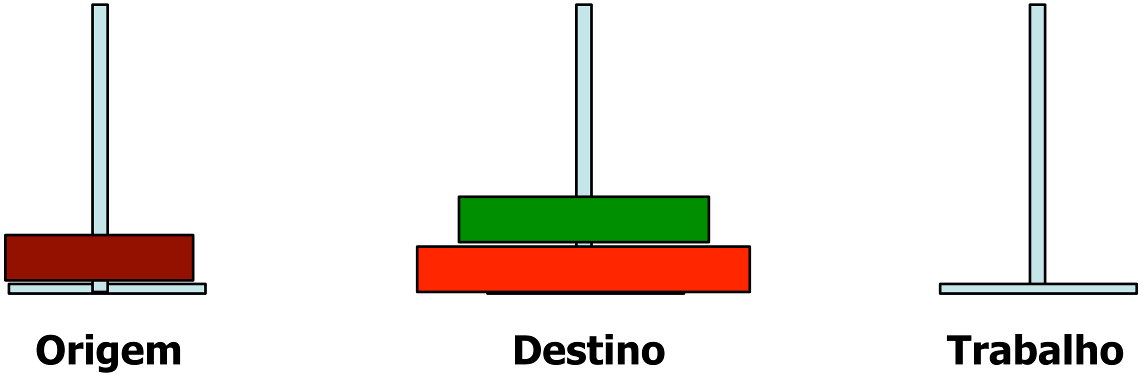
Movimento 4

Problema da Torre de Hanói



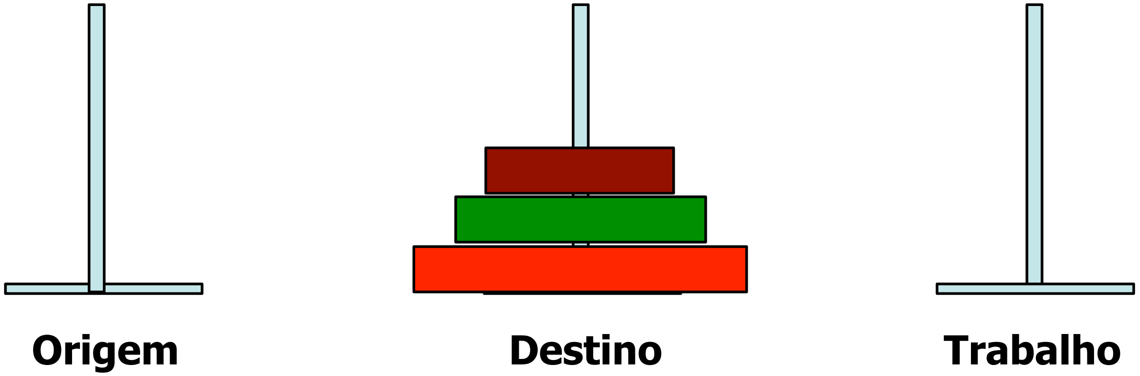
Movimento 5

Problema da Torre de Hanói



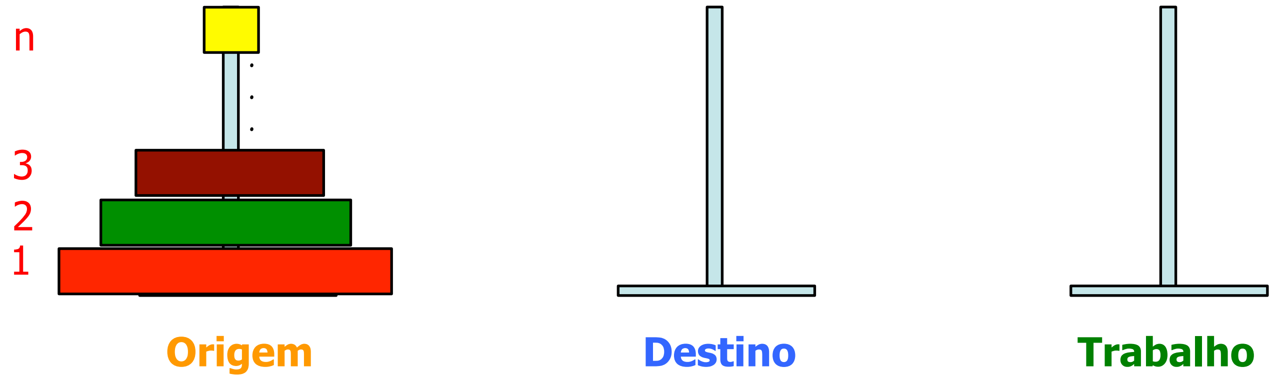
Movimento 6

Problema da Torre de Hanói

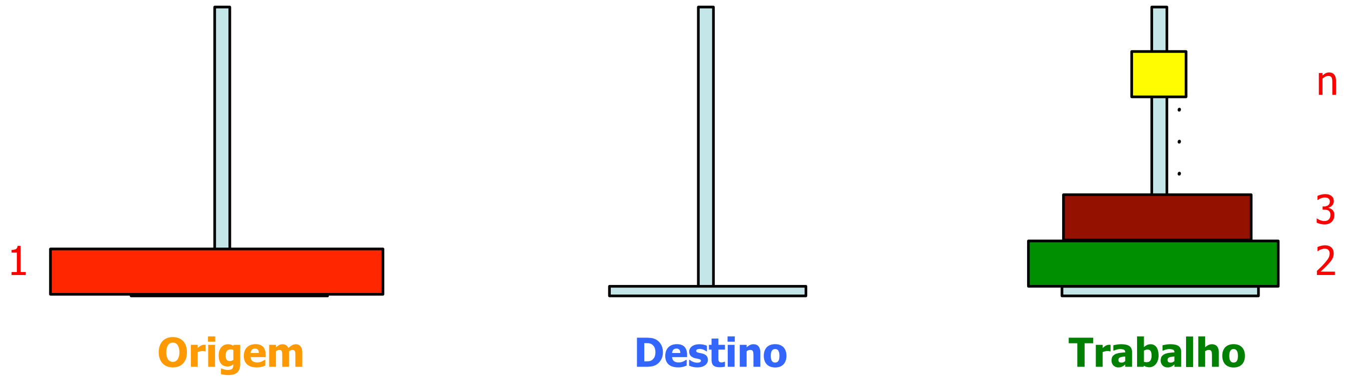


Movimento 7

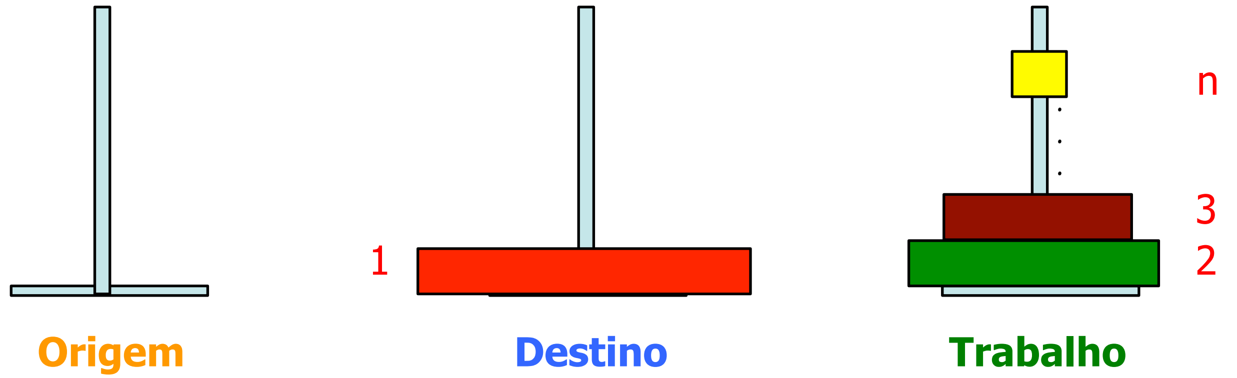
Esquema da solução do Problema da Torre de Hanói



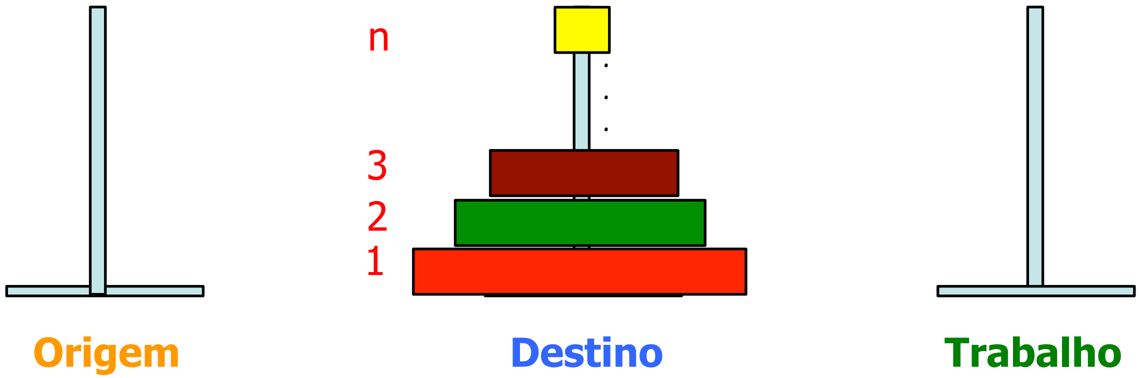
Esquema da solução do Problema da Torre de Hanói



Esquema da solução do Problema da Torre de Hanói



Esquema da solução do Problema da Torre de Hanói



Algoritmo da Torre de Hanói

<u>**Algoritmo**</u> **Hanoi**(n, de **ORIG** para **DEST** usando **TRAB**)

Início

Se n=1 **então** **ORIG** → **DEST**

Senão

Início

Hanoi(n-1, de **ORIG** para **TRAB** usando **DEST**);

ORIG → **DEST**;

Hanoi(n-1, DE **TRAB** PARA **DEST** USANDO **ORIG**)

Fim;

Fim.

Algoritmo da Torre de Hanói

```
Algoritmo Hanoi(n, de ORIG para DEST usando TRAB)
    Início
    Se n=1 então ORIG → DEST                          → (1)
         Senão
           Início
          Hanoi(n-1, de ORIG para TRAB usando DEST);
         ORIG → DEST;
         Hanoi(n-1, DE TRAB PARA DEST USANDO ORIG)
               Fim;
  Fim.
```

Algoritmo da Torre de Hanói

<u>**Algoritmo**</u> **Hanoi**(n, de **ORIG** para **DEST** usando **TRAB**)

Início

Se n=1 **então** **ORIG** → **DEST** → (1)

Senão

Início

Hanoi(n-1, de **ORIG** para **TRAB** usando **DEST**); → T_{n-1}

ORIG → **DEST**;

Hanoi(n-1, DE **TRAB** PARA **DEST** USANDO **ORIG**)

Fim;

Fim.

Algoritmo da Torre de Hanói

<u>Algoritmo</u> **Hanoi**(n, de **ORIG** para **DEST** usando **TRAB**)

Início

Se n=1 **então** **ORIG** → **DEST** → (1)

Senão

Início

Hanoi(n-1, de **ORIG** para **TRAB** usando **DEST**); → T_{n-1}

ORIG → **DEST**; → (1)

Hanoi(n-1, DE **TRAB** PARA **DEST** USANDO **ORIG**)

Fim;

Fim.

Algoritmo da Torre de Hanói

Algoritmo **Hanoi**(n, de **ORIG** para **DEST** usando **TRAB**)

Início

Se n=1 **então** **ORIG** → **DEST** ⟶ (1)

Senão

Início

Hanoi(n-1, de **ORIG** para **TRAB** usando **DEST**); ⟶ T_{n-1}

ORIG → **DEST**; ⟶ (1)

Hanoi(n-1, DE **TRAB** PARA **DEST** USANDO **ORIG**) ⟶ T_{n-1}

Fim;

Fim.

Relações de Recorrência

A relação de recorrência para o problema da Torre de Hanói é:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Relações de Recorrência

A relação de recorrência para o problema da Torre de Hanói é:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Dado histórico:

- Este problema foi proposto em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O número de discos era **64**.

Relações de Recorrência

A relação de recorrência para o problema da Torre de Hanói é:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Dado histórico:

- Este problema foi proposto em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O número de discos era **64**.

Observação:

- É possível calcular T_{64} usando a relação de recorrência dada acima?

Relações de Recorrência

A relação de recorrência para o problema da Torre de Hanói é:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Dado histórico:

- Este problema foi proposto em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O número de discos era **64**.

Observação:

- É possível calcular T_{64} usando a relação de recorrência dada acima? Seria preciso calcular T_2, T_3, ..., T_{64}, o que seria bem demorado.

Relações de Recorrência

A relação de recorrência para o problema da Torre de Hanói é:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Dado histórico:

- Este problema foi proposto em 1883 pelo matemático francês Edouard Lucas. O número de discos era **64**.

Observação:

- É possível calcular T_{64} usando a relação de recorrência dada acima? Seria preciso calcular T_2, T_3, ..., T_{64}, o que seria <u>bem</u> demorado. → Fórmula "fechada"

Método de Resolução de Relações de Recorrência

Existem diferentes métodos para resolver relações de recorrência:

Método de Resolução de Relações de Recorrência

Existem diferentes métodos para resolver relações de recorrência:

✓ Método de suposição e verificação;

Método de Resolução de Relações de Recorrência

Existem diferentes métodos para resolver relações de recorrência:

- ✓ Método de suposição e verificação;
- ✓ Método da iteração ou da substituição;

Método de suposição e verificação

Método de suposição e verificação

Duas etapas:

Método de suposição e verificação

Duas etapas:

✓ Arriscar um palpite para a forma da solução;

Método de suposição e verificação

Duas etapas:

- ✓ Arriscar um palpite para a forma da solução;
- ✓ Usar indução para determinar as constantes e mostrar que a solução funciona.

Método de suposição e verificação

Duas etapas:

- ✓ Arriscar um palpite para a forma da solução;
- ✓ Usar indução para determinar as constantes e mostrar que a solução funciona.

Consideremos a relação de recorrência para o Problema da Torre de Hanói:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$

Suposição: $T_n = 2^n - 1$

Método de suposição e verificação

Vamos tabular T_n para alguns valores de n:

n	T_n
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$7 = 2^3 - 1$
4	$15 = 2^4 - 1$
5	$31 = 2^5 - 1$

Suposição: $T_n = 2^n - 1 \Rightarrow \boxed{T_{64} = 2^{64} - 1}$

Método de suposição e verificação

- ✓ Nem sempre temos intuição suficiente para dar um palpite correto;

Método de suposição e verificação

- ✓ Nem sempre temos intuição suficiente para dar um palpite correto;
- ✓ O método da iteração permite que se reconheça um padrão sem necessidade de “chutar”;

Método de suposição e verificação

- ✓ Nem sempre temos intuição suficiente para dar um palpite correto;
- ✓ O método da iteração permite que se reconheça um padrão sem necessidade de “chutar”;
- ✓ Quando funciona, a solução da relação de recorrência é obtida resolvendo-se um somatório.

Método da Iteração ou Substituição

- O método consiste esquematicamente de:

Método da Iteração ou Substituição

- O método consiste esquematicamente de:

✓ algumas iterações do caso geral são expandidas até se encontrar uma lei de formação;

Método da Iteração ou Substituição

- O método consiste esquematicamente de:

✓ algumas iterações do caso geral são expandidas até se encontrar uma lei de formação;

✓ o somatório resultante é resolvido substituindo-se os termos recorrentes por fórmulas envolvendo apenas o(s) caso(s) base.

Método da Iteração ou Substituição

Consideremos a relação de recorrência para o Problema da Torre de Hanói:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Método da Iteração ou Substituição

Consideremos a relação de recorrência para o Problema da Torre de Hanói:

$$T_n = \begin{cases} 2T_{n-1} + 1 & , n > 1 \\ 1 & , n = 1 \end{cases}$$

Observação:

O método iterativo ou de substituição, é útil para relações de recorrência do tipo:

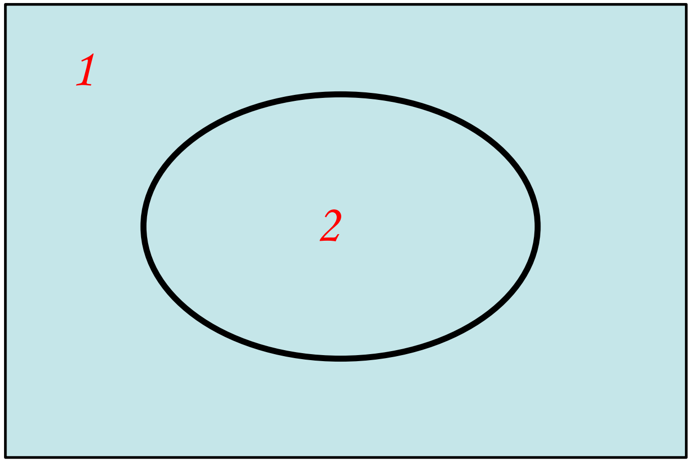
$$a_n = a_{n-1} + f(n)$$

para $n \geq 1$ e a_0 dado.

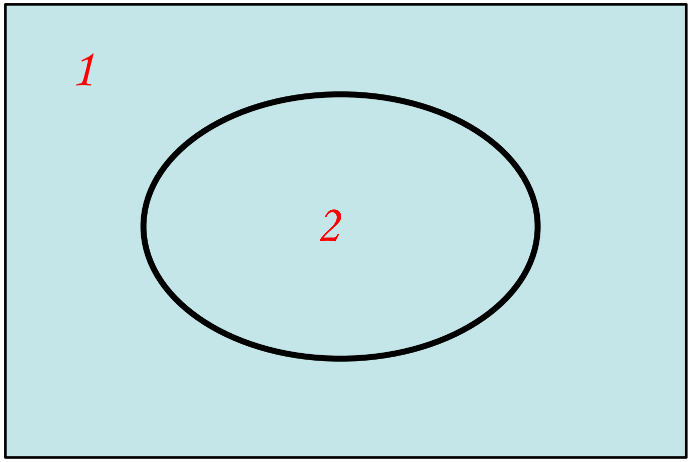
Problema das Ovais

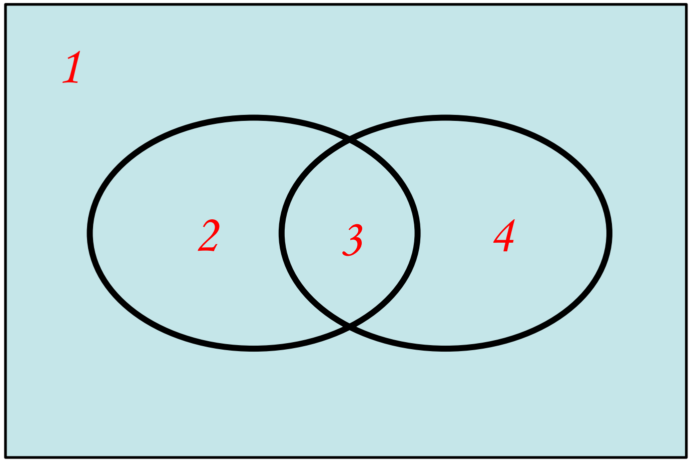
Se n ovais são desenhadas no plano e são tais que qualquer oval intercepta cada uma das outras ovais em exatamente 2 pontos e não temos 3 ovais se interceptando no mesmo ponto, então em quantas regiões essas ovais dividem o plano?

Problema das Ovais

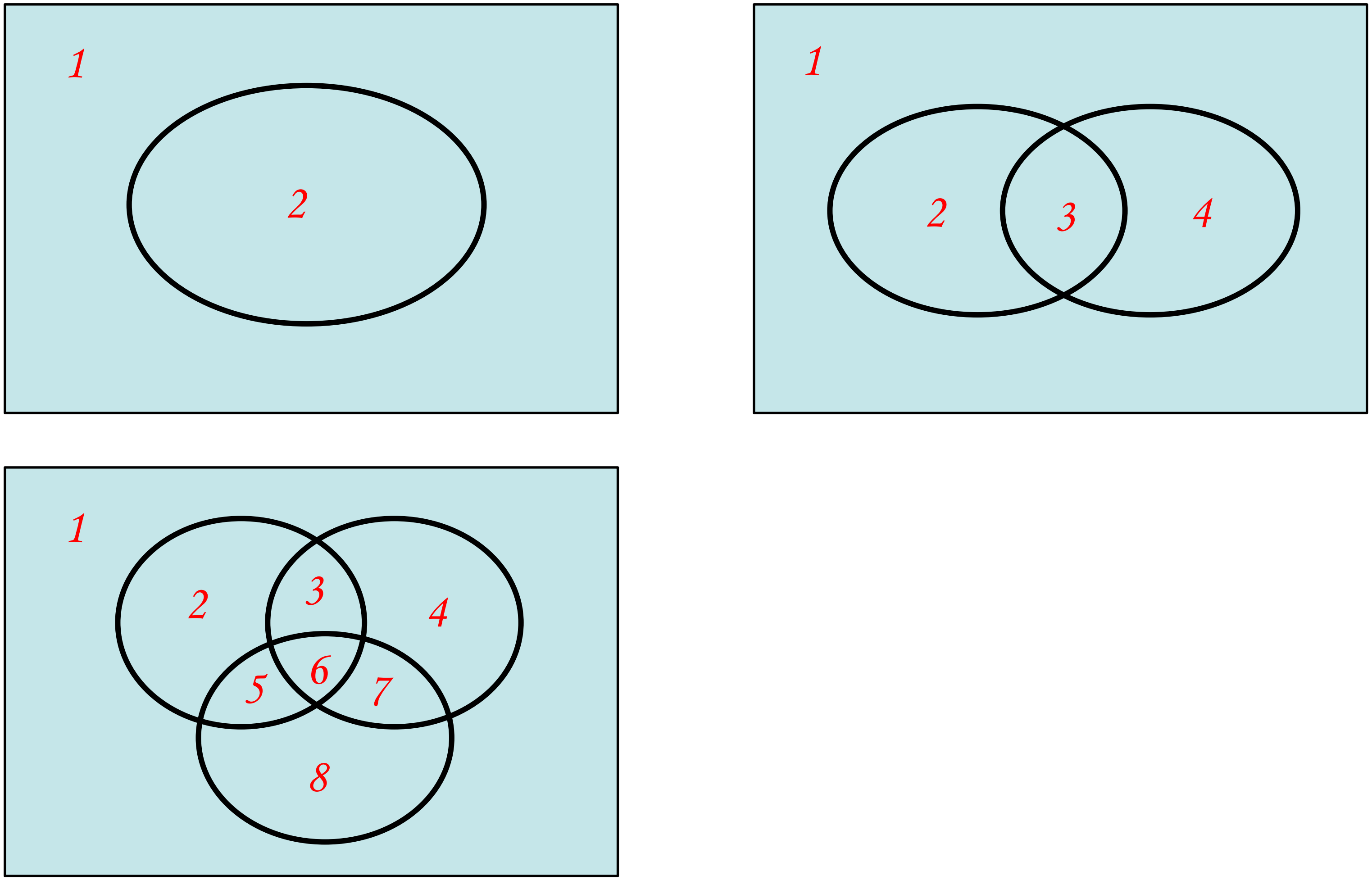


Problema das Ovais

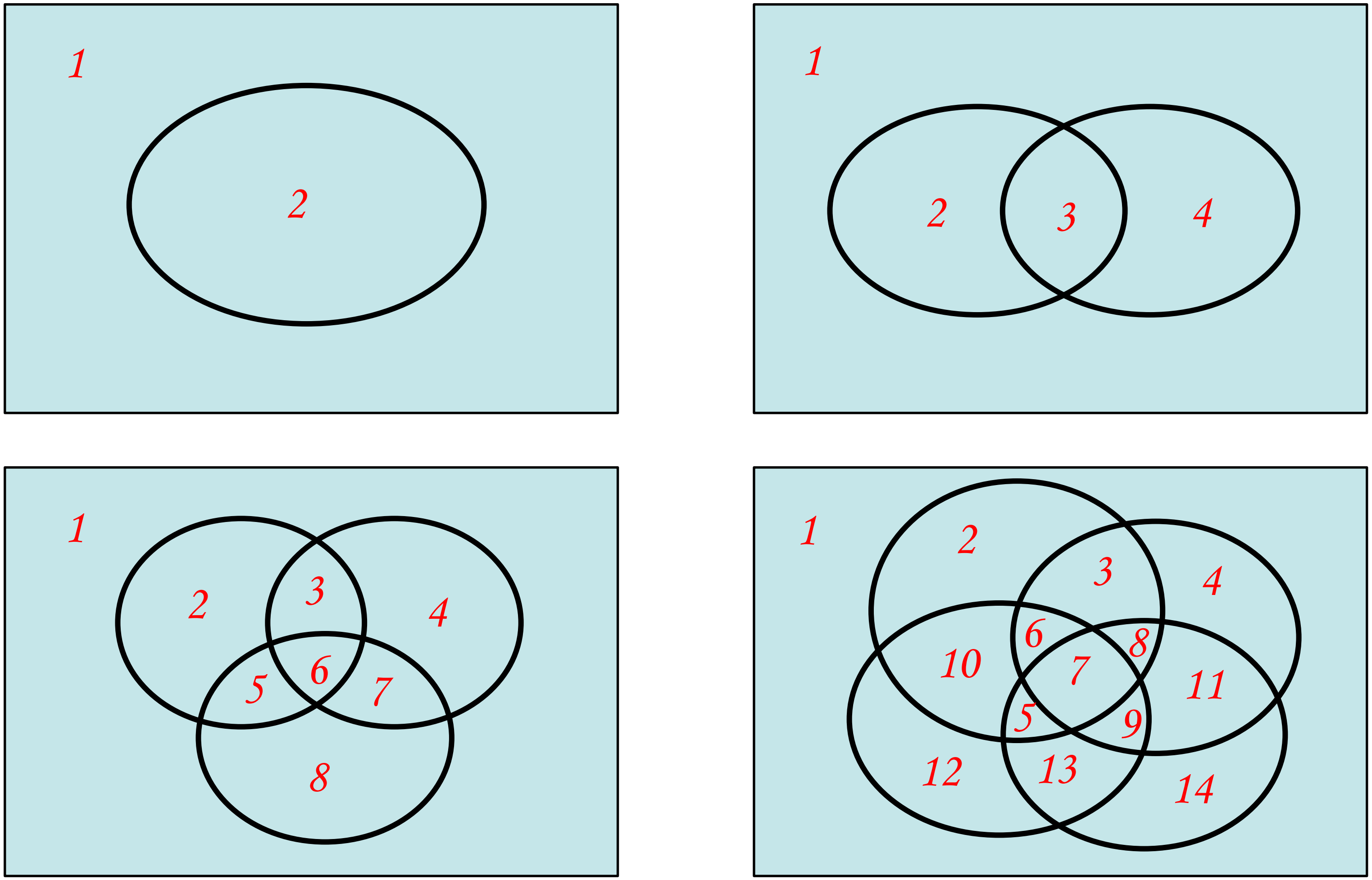




Problema das Ovais



Problema das Ovais



Problema das Ovais

- Suponha que desenhamos $n - 1$ ovais que dividem o plano em a_{n-1} regiões.

Problema das Ovais

- Suponha que desenhamos $n - 1$ ovais que dividem o plano em a_{n-1} regiões.

- A n-ésima oval intercepta essas $n - 1$ ovais em $2(n - 1)$ pontos, isto é, a n-ésima oval vai ser dividida em $2(n - 1)$ arcos.

Problema das Ovais

- Cada um desses arcos vai dividir cada uma das n − 1 ovais em 2 regiões, temos a relação de recorrência:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + 2(n-1)}$$

Problema das Ovais

- Cada um desses arcos vai dividir cada uma das n − 1 ovais em 2 regiões, temos a relação de recorrência:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + 2(n-1)}$$

- Qual é a condição de fronteira?

Problema das Ovais

- Cada um desses arcos vai dividir cada uma das n − 1 ovais em 2 regiões, temos a relação de recorrência:

$$\boxed{a_n = a_{n-1} + 2(n-1)}$$

- Qual é a condição de fronteira?

$$\boxed{a_1 = 2}$$

Exercícios

1) $T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + 1, & \text{se } n > 1 \end{cases}$

2) $T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + n^2, & \text{se } n > 1 \end{cases}$

3) $T(n) = \begin{cases} 1, & \text{se } n = 1 \\ 2T(n/2) + n, & \text{se } n > 1 \end{cases}$